

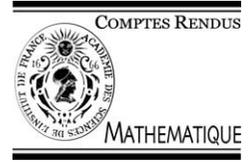


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 197–202



Analyse mathématique

# Opérateurs linéaires continus d'extension dans des intersections de classes ultradifférentiables

Pascal Beaugendre

Université de Paris-Sud, département de mathématiques, bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 18 novembre 2003 ; accepté le 1<sup>er</sup> décembre 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

## Résumé

Mityagin a montré que les polynômes de Tchebyshev forment une base de Schauder de l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Il en déduit un opérateur linéaire continu d'extension explicite. Ces résultats ont été étendus, par Goncharov, à des compacts ne satisfaisant pas les inégalités de Markov. A contrario, Tidten a donné des exemples de compacts pour lesquels il n'y a pas d'opérateur linéaire continu d'extension. Dans cette Note, on généralise ces travaux à des classes de fonctions ultradifférentiables construites sur le modèle de l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques. On obtient notamment un théorème d'extension linéaire dans des classes de Beurling assez grandes. **Pour citer cet article : P. Beaugendre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Continuous linear extension operators in intersections of ultradifferentiable classes.** Mityagin proved that the Tchebyshev polynomials form a Schauder basis of the space of  $C^\infty$  functions on the interval  $[-1, 1]$ . Thus, he deduced an explicit continuous linear extension operator. These results were extended, by Goncharov, to compact sets which do not satisfy the Markov's inequalities. On the other hand, Tidten gave examples of compact sets for which there is no continuous linear extension operator. In this Note, we generalize these works to ultradifferentiable classes of functions built on the model of the intersection of non quasi-analytic Gevrey classes. We get, among other things, a Whitney linear extension theorem for ultradifferentiable jets of Beurling type. **To cite this article: P. Beaugendre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Let  $\phi$  be an increasing convex function on  $\mathbb{R}_+$  such that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty$ . Let  $I$  be an interval with non-empty interior. Denote by  $I_\phi(I)$  the class of  $C^\infty$ -functions  $f$  on  $I$  such that for every  $a > 0$ ,

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \sup_{x \in I} \frac{|f^{(p)}(x)|}{p! \exp(\phi(ap))} = \|f\|_a < +\infty.$$

Adresses e-mail : [pbeaugendre@ifrance.com](mailto:pbeaugendre@ifrance.com), [pascal.beaugendre@math.u-psud.fr](mailto:pascal.beaugendre@math.u-psud.fr) (P. Beaugendre).

1631-073X/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crma.2003.12.002

The set  $I_\phi(I)$  is a Fréchet space.

**Theorem 0.1.** (1) *The Fréchet space  $I_\phi([-1, 1])$  has an absolute basis.*

(2) *Suppose that  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln u} = +\infty$ , then there exists a continuous linear extension operator from  $I_\phi([-1, 1])$  to  $I_\phi(\mathbb{R})$ .*

Consider the compact set  $K = \{0\} \cup (\bigcup_{k \geq 1} [a_k, b_k])$  where  $(a_k)_{k \geq 1}$  and  $(b_k)_{k \geq 1}$  have the following properties.

- The sequences  $(a_k)_{k \geq 1}$  and  $(b_k - a_k)_{k \geq 1}$  monotonically decrease to 0.
- $b_1 \leq 1$  and for every  $k \geq 1$ ,  $a_k - b_{k+1} > 0$ .
- There exist  $C_0 \geq 3$  and  $M > 0$  such that, for every  $k \geq 1$ , we have  $2b_k \leq C_0(b_k - a_k)$ ,  $b_k - a_k \leq 2C_0(a_k - b_{k+1})$  and  $b_{k+1} - a_{k+1} \geq 2^{1-M}(b_k - a_k)^M$ .

A jet  $f$  on  $K$  is a sequence  $(f^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  of continuous real-valued functions on  $K$ . For every  $(j, p) \in \mathbb{N}^2$ ,  $j \leq p$ , and every  $(\zeta, x) \in K^2$ , we note the Taylor remainder by

$$R_\zeta^{j,p} f(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=0}^{p-j} \frac{1}{k!} (x - \zeta)^k f^{(j+k)}(\zeta).$$

Denote by  $I_\phi(K)$  the class of jets  $f$  satisfying the following condition:

for every  $a > 0$ ,

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \max \left\{ \sup_{x \in K} \frac{|f^{(p)}(x)|}{p! \exp(\phi(ap))}, \sup_{j: j \leq p} \sup_{\substack{(\zeta, x) \in K^2 \\ \zeta \neq x}} \frac{|R_\zeta^{j,p} f(x)|}{j! \exp(\phi(a(p+1))) |\zeta - x|^{p+1-j}} \right\} = \|f\|_a < +\infty.$$

**Theorem 0.2.** *Suppose that  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u^2} = +\infty$ , then the Fréchet space  $I_\phi(K)$  has an absolute basis and there exists a continuous linear extension operator from  $I_\phi(K)$  to  $I_\phi(\mathbb{R})$*

Suppose that  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln(\ln u)} = +\infty$ , then there exists a function  $g \in I_\phi(\mathbb{R})$  with  $g > 0$  on  $\mathbb{R}_+^*$  and  $g = 0$  on  $\mathbb{R}_-$ . Put  $K_g = \{(x, y) \in [0, 1]^2, 0 \leq y \leq g(x)\}$ . Similarly as in the case of one variable we define the spaces  $I_\phi(K_g)$  and  $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ .

**Theorem 0.3.** *There is no continuous linear extension operator from  $I_\phi(K_g)$  to  $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ .*

### 1. Définitions et notations

Dans toute cette Note, on suppose que  $\phi$  est une fonction convexe croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , nulle en 0 et vérifiant la condition suivante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty. \tag{1}$$

On considère l'espace de Fréchet  $I_\phi([-1, 1])$  formé des fonctions  $f$  appartenant à  $C^\infty([-1, 1])$  et telles que, pour tout  $a > 0$ , on ait

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|f^{(p)}(x)|}{p! \exp(\phi(ap))} = \|f\|_a < +\infty.$$

On définit l'espace  $I_\phi(\mathbb{R})$  de manière analogue.

Par exemple, si  $\phi$  est la fonction définie par  $\phi(t) = t \ln(1 + t)$ , on retrouve l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques.

On désigne par  $R_{[-1,1]}$  l'application de restriction, de  $I_\phi(\mathbb{R})$  dans  $I_\phi([-1, 1])$ . Une application linéaire continue  $U$ , de  $I_\phi([-1, 1])$  dans  $I_\phi(\mathbb{R})$ , vérifiant  $R_{[-1,1]} \circ U = \text{id}$  est appelée un opérateur linéaire continu d'extension. Ici  $\text{id}$  désigne l'application identité sur  $I_\phi([-1, 1])$ .

Soit  $n$  un entier, on pose, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ; c'est le polynôme de Tchebyshev de degré  $n$  pour l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Si  $f$  est une fonction continûment dérivable sur  $[-1, 1]$ , pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) T_n(x)$ , avec  $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) dt$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \cos(nt) dt$ .

On rappelle l'inégalité de Markov ([3], p. 131) :

si  $P$  est un polynôme de degré au plus  $n$ , alors, pour tout entier  $p$ , on a :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |P^{(p)}(x)| \leq T_n^{(p)}(1) \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|.$$

### 2. Une base de l'espace $I_\phi([-1, 1])$

**Définition 2.1.** Soit  $\mathcal{F}$  un espace de Fréchet muni d'une famille de semi-normes  $(\|\cdot\|_a)_{a>0}$ . Soient  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  et  $(x'_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments du dual de  $\mathcal{F}$ . On dit que le système  $\{(x_n)_{n \geq 0}, (x'_n)_{n \geq 0}\}$  est une *base de Schauder absolue* de l'espace  $\mathcal{F}$  lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\{(x_n)_{n \geq 0}, (x'_n)_{n \geq 0}\}$  est un système biorthogonal ;
- (ii) pour tout  $x \in \mathcal{F}$ , on a  $x = \sum_{n \geq 0} x'_n(x) x_n$  ;
- (iii) pour tout  $a > 0$ , il existe deux réels  $b > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $x \in \mathcal{F}$ , on ait  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x'_n(x)| \|x_n\|_a \leq C \|x\|_b$ .

**Théorème 2.2.** Le système  $\{(T_n)_{n \geq 0}, (a_n)_{n \geq 0}\}$  est une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet  $I_\phi([-1, 1])$ .

**Démonstration.** En suivant les calculs de Mityagin [7], on montre que si  $f \in I_\phi([-1, 1])$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $r \in \mathbb{N}$ , on a

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{n^{r+2}} \|f\|_a 2^{r+2} (r+2)! \exp(\phi(a(r+2))).$$

Ensuite, avec l'inégalité de Markov, on établit que, pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe une constante  $B_a$  telle pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour toute fonction  $f \in I_\phi([-1, 1])$ , on ait

$$|a_n(f)| \|T_n\|_{8a} \leq B_a \|f\|_a \frac{1}{n^2}. \quad \square$$

**Remarque 1.** Dans ce théorème, la condition (1) est la seule condition de croissance imposée à la fonction  $\phi$ .

### 3. Extension linéaire de $I_\phi([-1, 1])$ dans $I_\phi(\mathbb{R})$

**Théorème 3.1.** On suppose que  $\phi$  vérifie la condition

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln u} = +\infty. \tag{2}$$

Alors il existe un opérateur linéaire continu d'extension, de  $I_\phi([-1, 1])$  dans  $I_\phi(\mathbb{R})$ .

**Démonstration.** En utilisant le Lemme 3.1.1 et la Proposition 4.2 de [1], on construit, pour tout entier  $n$ , une fonction  $u_n$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , positive, à support dans  $[-1 - \frac{1}{1+n^2}, 1 + \frac{1}{1+n^2}]$ , égale à 1 sur  $[-1, 1]$  et vérifiant la condition suivante :

pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq C_a (2C(1+n^2))^p p! \exp(\phi(ap)),$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de la fonction  $\phi$  et  $C_a$  est une constante ne dépendant que de la fonction  $\phi$  et de  $a$ .

On conclut en vérifiant que la suite  $(\tilde{T}_n)_{n \geq 0} = (T_n u_n)_{n \geq 0}$  satisfait à la condition suivante :

pour tout  $a > 0$ , il existe deux réels  $b > 0$  et  $\tilde{C}_a > 0$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $\|\tilde{T}_n\|_a \leq \tilde{C}_a \|T_n\|_b$ .  $\square$

**Remarque 2.** On dit qu'un ensemble compact  $K$  de  $\mathbb{R}$  satisfait les inégalités de Markov lorsqu'il existe deux réels  $r \geq 2$  et  $\mathcal{M} > 0$  tels que, pour tout polynôme  $Q$  et pour tout entier  $j$ , on ait  $\sup_{x \in K} |Q^{(j)}(x)| \leq \mathcal{M}(\deg Q)^{rj} \sup_{x \in K} |Q(x)|$ . L'intervalle  $[-1, 1]$  satisfait ces inégalités avec  $r = 2$  et  $\mathcal{M} = 1$ . Ainsi le Théorème 3.1 est un cas particulier du Théorème 8.8 de [1].

**Remarque 3.** On a également établi dans [1] que l'application de restriction  $R_{[-1,1]}$  de  $I_\phi(\mathbb{R})$  dans  $I_\phi([-1, 1])$  est surjective, c'est-à-dire que les fonctions s'étendent, si et seulement si la fonction  $\phi$  vérifie la condition suivante :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln(\ln u)} = +\infty. \quad (3)$$

La condition (2) impose une croissance plus forte à la fonction  $\phi$ .

Pour l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques, il n'y a pas d'opérateur linéaire continu d'extension. On ne sait pas si la condition (2) est nécessaire pour qu'un tel opérateur existe.

#### 4. Définitions et notations

Dans tout ce qui suit, on considère deux suites  $(a_k)_{k \geq 1}$  et  $(b_k)_{k \geq 1}$  vérifiant les conditions suivantes :

- Les suites  $(a_k)_{k \geq 1}$  et  $(b_k - a_k)_{k \geq 1}$  décroissent vers 0 ;
- $b_1 \leq 1$  et pour tout entier  $k \geq 1$ , on a  $a_k - b_{k+1} > 0$  ;
- Il existe deux constantes  $C_0 \geq 3$  et  $M > 0$  telles que, pour tout  $k \geq 1$ , on ait  $2b_k \leq C_0(b_k - a_k)$ ,  $b_k - a_k \leq 2C_0(a_k - b_{k+1})$  et  $b_{k+1} - a_{k+1} \geq 2^{1-M}(b_k - a_k)^M$ .

On définit le compact de Goncharov

$$K = \{0\} \cup \left( \bigcup_{k \geq 1} [a_k, b_k] \right).$$

Un jet  $f$  sur  $K$  est la donnée d'une suite  $(f^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues sur  $K$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $p \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  tels que  $j \leq p$  et  $(\zeta, x) \in K^2$ . On définit le *reste de Taylor*  $R_\zeta^{j,p} f(x)$  par

$$R_\zeta^{j,p} f(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=0}^{p-j} \frac{1}{k!} (x - \zeta)^k f^{(j+k)}(\zeta).$$

L'espace de Fréchet  $I_\phi(K)$  est formé de l'ensemble des jets  $f$  sur  $K$  vérifiant la condition suivante :

pour tout  $a > 0$ ,

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \max \left\{ \sup_{x \in K} \frac{|f^{(p)}(x)|}{p! \exp(\phi(ap))}, \sup_{j: j \leq p} \sup_{\substack{(\zeta, x) \in K^2 \\ \zeta \neq x}} \frac{|R_{\zeta}^{j,p} f(x)|}{j! \exp(\phi(a(p+1))) |\zeta - x|^{p+1-j}} \right\} = \|f\|_a < +\infty.$$

### 5. Une base de de Schauder de l'espace $I_{\phi}(K)$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\delta_k = \frac{b_k - a_k}{2}$  et on définit l'application  $l$ , de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}$ , en posant  $l(k) = \lfloor \frac{-\ln(\delta_k)}{\ln(4C_0)} \rfloor$ . Ici  $[\cdot]$  désigne la fonction partie entière.

Pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ , on définit le polynôme de Tchebyshev  $T_{n,k}(x) = T_n((x - x_k)/\delta_k)$  puis on considère la famille  $(\overline{T}_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  formée des fonctions définies sur  $K$  de la façon suivante :

- Si  $n < l(k)$ , on pose  $\overline{T}_{n,k} = \chi_{[0, b_k] \cap K} T_{n,k}|_K$ .
- Si  $n \geq l(k)$ , on pose  $\overline{T}_{n,k} = \chi_{[a_k, b_k] \cap K} T_{n,k}|_K$ .

Ici,  $T_{n,k}|_K$  désigne la restriction de  $T_{n,k}$  au compact  $K$  et, pour tout sous-ensemble  $E$  de  $K$ ,  $\chi_E$  désigne la fonction caractéristique de  $E$ .

Si  $f \in I_{\phi}(K)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $a_{0,k}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(0)}(x_k + \delta_k \cos t) dt$  et pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , on pose  $a_{n,k}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(0)}(x_k + \delta_k \cos t) \cos(nt) dt$ . Ensuite, comme dans [5], pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ , on définit le coefficient  $\eta_{n,k}(f)$  de la façon suivante :

- si  $k = 1$ ,  $\eta_{n,k}(f) = a_{n,k}(f)$ ,
- si  $k > 1$  et  $n \geq l(k - 1)$ ,  $\eta_{n,k}(f) = a_{n,k}(f)$ ,
- si  $k > 1$  et  $n < l(k - 1)$ ,  $\eta_{n,k}(f) = a_{n,k}(f) - \sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}(\overline{T}_{i,k-1}) a_{i,k-1}(f)$ .

**Théorème 5.1.** Si  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u^2} = +\infty$  alors  $\{(\overline{T}_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}, (\eta_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}\}$  est une base de Schauder absolue de l'espace de  $I_{\phi}(K)$ .

### 6. Extension linéaire des jets appartenant à $I_{\phi}(K)$

Comme dans la preuve du Théorème 3.1, en utilisant des fonctions troncatures adaptées, on établit le théorème suivant :

**Théorème 6.1.** Si  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi(u)}{u^2} = +\infty$ , alors il existe un opérateur linéaire continu d'extension, de  $I_{\phi}(K)$  dans  $I_{\phi}(\mathbb{R})$ .

**Remarque 4.** Ce résultat est une version ultradifférentiable d'un théorème de Goncharov. En outre, si on considère le cas  $\delta_k = 2^{-3^k}$  et  $b_k = 6\delta_k$ , alors le compact  $K$  ne satisfait pas les inégalités de Markov (voir [6]).

**Remarque 5.** Dans le cas particulier où  $\phi(u) = u^a$ , avec  $a > 2$ ,  $I_{\phi}(K)$  est un espace de Beurling (voir [2]).

## 7. Compacts « ventrus » pour lesquels il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension

On suppose que  $\phi$  vérifie la condition (3). Soit  $g$  une fonction appartenant à  $I_\phi(\mathbb{R})$ , nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On pose  $K_g = \{(x, y) \in [0, 1]^2, 0 \leq y \leq g(x)\}$ ;  $K_g$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  régulier au sens de Whitney. On note  $I_\phi(K_g)$  l'ensemble des fonctions  $f$ , de classe  $C^\infty$  sur  $K_g$ , telles que, pour tout  $a > 0$ , on ait

$$\sup_{(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2} \sup_{(x_1, x_2) \in K_g} \frac{|\partial^{p_1+p_2} f(x) / \partial^{p_1} x_1 \partial^{p_2} x_2|}{(p_1 + p_2)! \exp(\phi(a(p_1 + p_2)))} = \|f\|_a < +\infty.$$

On définit de même l'espace  $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ .

Le théorème qui suit est inspiré par un travail de Tidten [8]; il complète une situation étudiée par Franken dans [4].

**Théorème 7.1.** (1) *L'application de restriction, de  $I_\phi(\mathbb{R}^2)$  dans  $I_\phi(K_g)$  est surjective.*

(2) *Il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension, de  $I_\phi(K_g)$  dans  $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ .*

## Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Jacques Chaumat pour son aide précieuse.

## Références

- [1] P. Beaugendre, Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques, *Ann. Polon. Math.* 76 (2001) 213–243.
- [2] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, *Res. Math.* 17 (1990) 206–237.
- [3] R. De Vore, G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, 1993.
- [4] U. Franken, Examples of compact sets with non-empty interior which do not admit a continuous linear extension operator for ultradifferentiable functions of Beurling type, *Arch. Math.* 62 (1994) 239–247.
- [5] A. Goncharov, Spaces of Whitney functions with basis, *Math. Nachr.* 220 (2000) 47–57.
- [6] A. Goncharov, On the explicit form of an extension operator for  $C^\infty$ -functions, *East J. Approximations* 7 (2) (2001) 179–193.
- [7] B.S. Mityagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, *Russian Math. Surveys* 16 (1961) 59–127.
- [8] M. Tidten, Fortsetzungen von  $C^\infty$ -Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in  $\mathbb{R}^n$  definiert sind, *Manuscripta Math.* 27 (1979) 291–312.