

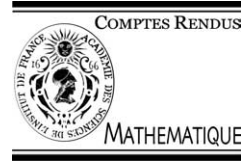


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 793–798



Systèmes dynamiques

# Dynamique de la diffusion de l'erreur sur plusieurs polytopes

Charles Tresser<sup>1</sup>

IBM, P.O. Box 218, Yorktown Heights, NY 10598, USA

Reçu le 31 octobre 2003 ; accepté après révision le 7 janvier 2004

Présenté par Jean-Christophe Yoccoz

---

## Résumé

Nous discutons des algorithmes gloutons (pour la norme euclidienne), avec des suites de données dans une famille de polytopes d'un espace affine et les résultats pris parmi les sommets des polytopes respectifs. De tels problèmes d'ordonnement interviennent dans divers domaines d'applications. Nous produisons quelques exemples simples où l'erreur demeure bornée, même avec une infinité de polytopes. Dans le cas d'un seul polytope, il a été montré par ailleurs, que le caractère borné de l'erreur cumulée est équivalent à l'existence d'une région invariante pour un système dynamique équivalent à l'algorithme et défini dans l'espace affine qui contient ce polytope. Nous montrons, au contraire, qu'il n'existe pas, en général, de région bornée dès que l'on considère au moins deux polytopes différents. *Pour citer cet article : C. Tresser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Dynamic of error diffusion on several polytopes.** We discuss algorithms for scheduling, greedy for the Euclidean norm, with inputs in a family of polytopes lying in an affine space and the corresponding outputs chosen among the vertices of the respective polytopes. Such scheduling problems arise in various settings. We provide simple examples where the error remains bounded, including cases when there are infinitely many polytopes. In the case of a single polytope the boundedness of the cumulative error is known to be equivalent to the existence of an invariant region for a dynamical system in the affine space that contains this polytope. We show here that, on the contrary, no bounded invariant region can be found in affine space in general, as soon as there are at least two different polytopes. *To cite this article: C. Tresser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

We discuss greedy algorithms for scheduling and in particular for digital printing, with inputs in a family of polytopes lying in an affine space and vertices of the respective polytopes as successive outputs. More precisely we consider here the case when the greed of the algorithm is dictated by the Euclidean norms of the successive cumulative errors. Scheduling problems with many polytopes arise naturally, for instance when one has *a priori* a

---

Adresse e-mail : [tresser@us.ibm.com](mailto:tresser@us.ibm.com) (C. Tresser).

<sup>1</sup> CT est partiellement supporté par une bourse de la National Science Foundation.

single polytope  $\mathcal{P}$  but with the constraint that the output has to be in the same face as the input whenever the input belongs to a face. We provide some simple examples where the error remains bounded, including cases when there are infinitely many polytopes.

**Definition 0.1** (*Greedy Algorithms for a family of polytopes*). Let  $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  be a family of polytopes in the affine space  $\mathcal{A}^\delta$ , and  $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha(\mathcal{P}_\alpha)$  be the set of vertices of  $\mathcal{P}_\alpha$ . For a sequence of polytopes  $\mathcal{P}_{\alpha(i)}$ ,  $i \geq 0$ , in the family, a sequence of inputs  $\mathcal{I}(i) \in \mathcal{P}_{\alpha(i)}$ ,  $i \geq 0$ , and an *initial error*  $\mathcal{E}(0) \in \mathbb{R}^\delta$ , the sequence of *modified inputs*  $\mathcal{M}(i) \in \mathcal{A}^\delta$ , the sequence of approximations at step  $i$ ,  $\mathcal{S}(i) \in \mathcal{C}_{\alpha(i)}(\mathcal{P}_{\alpha(i)})$ , and the sequence of *error vectors*  $\mathcal{E}(i) \in \mathbb{R}^\delta$  are inductively defined by:

$$\mathcal{M}(i) = \mathcal{E}(i) + \mathcal{I}(i), \quad \mathcal{S}(i) = \text{Vor}(\mathcal{M}(i)), \quad \text{and} \quad \mathcal{E}(i+1) = \overrightarrow{\mathcal{S}(i)\mathcal{M}(i)},$$

where  $\text{Vor}(\mathcal{M}(i))$  is the point of  $\mathcal{C}_{\alpha(i)}(\mathcal{P}_{\alpha(i)})$  that is closest to  $\mathcal{M}(i)$ , with a tie breaking rule (assumed here to be deterministic to fix the ideas).

With one or several polytopes, the greedy algorithms (GA's) that we have described can be interpreted as dynamical systems in the vector space  $\mathbb{R}^\delta$  where live the errors that are minimized by the GA's [11,12]. Setting  $\gamma = \mathcal{I}(i)$ , the evolution of  $\mathbf{v} = \mathcal{E}(i)$  is governed by the time dependent dynamical system in  $\mathbb{R}^\delta$  given by:

$$G_{\gamma;\alpha}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\gamma - \text{Vor}(\mathbf{v} + \gamma)).$$

In the affine space  $\mathcal{A}^\delta$  the evolution of the modified inputs can also be interpreted as dynamics [2], since we have the iterative formula  $\mathcal{M}(i+1) = \mathcal{E}(i+1) + \mathcal{I}(i+1) = \mathcal{M}(i) - \text{Vor}(\mathcal{M}(i)) + \mathcal{I}(i+1)$ . Setting  $x = \mathcal{M}(i)$  and  $\gamma = \mathcal{I}(i+1)$ , we get the time dependent dynamical system in  $\mathcal{A}^\delta$ :

$$F_{\gamma;\alpha}(x) = (x - \text{Vor}(x)) + \gamma = x + (\gamma - \text{Vor}(x)).$$

**Definition 0.2** (*Invariant sets*). The set  $V \subset \mathbb{R}^\delta$  is an *invariant vector set* for the family (with two indices)  $G_{\gamma;\alpha}$  if  $\bigcup_{\alpha \in A} (\bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}_\alpha} G_{\gamma;\alpha}(V)) \subset V$ . Given a family of polytopes  $\mathcal{P}_\alpha$ , one says that  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}^\delta$  is an *invariant region for the family of applications*  $F_{\gamma;\alpha}$ , or that  $\mathcal{Q}$  is an *invariant region for the family of polytopes*  $\mathcal{P}_\alpha$  if  $\bigcup_{\alpha \in A} (\bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}} F_{\gamma;\alpha}(\mathcal{Q})) \subset \mathcal{Q}$ . We say *invariant set* to mean one of the two sets that we have defined.

When there is a single polytope, the existence of both kinds of invariant sets are equivalent, so that the bounded character of errors is guaranteed by the following fundamental result (where the convexity property is important in applications to digital printing):

**Theorem 0.3** (Existence of convex and bounded invariant regions [1]). *For any polytope  $\mathcal{P}$  there exists a convex and bounded invariant region  $\mathcal{Q}$  containing  $\mathcal{P}$  and invariant in the sense that:*

$$\bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}} F_\gamma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}. \tag{1}$$

Furthermore,  $\mathcal{Q}$  can be chosen to contain any compact set given in advance.

**Corollary 0.4.** *Under the hypotheses of Theorem 0.3, the sequence of the norms of the errors provided by the greedy algorithm for the Euclidean distance for one polytope is uniformly bounded.*

It is also proven in [1] that for any finite collection of polytopes  $\{\mathcal{P}_j \mid j \in J; \#(J) < \infty\}$ , there exists a region which is simultaneously invariant for each of the mappings  $F_{\gamma;i}$  where  $i \in J$ . To the contrary our main result here is the following nonexistence result:

**Theorem 0.5** (Nonexistence of an invariant region in the general case). *Consider any family of polytopes  $\{\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{A}^\delta; \alpha \in A\} \subset \mathcal{A}^\delta$  whose dimensions are all bounded by  $\delta$  and such that two at least of these polytopes have distinct closures. Then there does not exist any bounded invariant region in  $\mathcal{A}^\delta$  for the family of applications  $G_{\gamma;\alpha}$ .*

We expect to prove elsewhere the existence of bounds on errors in the general case. Meanwhile, we notice that there are examples of existence of bounds, and even examples with families with infinitely many polytopes. To build such examples it is enough to start in dimension 1 where an example is provided by taking infinitely many distinct intervals: simple examples in any dimension are trivially built from there. Less trivial is the case of families made of a simplex and all its faces in all dimensions: bounds for these cases are provided in [4].

### 1. Introduction et motivations

Nous allons discuter des aspects géométriques de l'étude d'algorithmes gloutons (AGs) d'ordonnement où toute suite donnée de points dans une famille de polytopes, dans un espace affine  $\mathcal{A}^\delta$  est approximée par une suite de sommets des polytopes respectifs. Nous nous intéressons plus précisément aux algorithmes d'approximation gloutons pour la norme euclidienne qui sont des généralisations du processus de *diffusion de l'erreur* (DE) bien connu en imprimerie digitale [6,7,15,2]. L'erreur cumulée est calculée à chaque pas avec le sommet choisi par l'AG défini comme celui qui minimise la norme de l'erreur cumulée, avec une règle de levée des ambiguïtés.

**Définition 1.1** (*Algorithmes glouton pour des famille de polytopes*). Soient  $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une famille de polytopes dans l'espace affine  $\mathcal{A}^\delta$ , et  $C_\alpha = C_\alpha(\mathcal{P}_\alpha)$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{P}_\alpha$ . Pour une suite de polytopes  $\mathcal{P}_{\alpha(i)}$ ,  $i \geq 0$ , dans la famille, une suite de données  $\mathcal{I}(i) \in \mathcal{P}_{\alpha(i)}$ ,  $i \geq 0$ , et une *erreur initiale*  $\mathcal{E}(0) \in \mathbb{R}^\delta$ , la suite de *données modifiées*  $\mathcal{M}(i) \in \mathcal{A}^\delta$ , la suite d'approximations au pas  $i$ ,  $\mathcal{S}(i) \in C_{\alpha(i)}(\mathcal{P}_{\alpha(i)})$ , et la suite de *vecteurs erreur*  $\mathcal{E}(i) \in \mathbb{R}^\delta$  sont définies inductivement par  $\mathcal{M}(i) = \mathcal{E}(i) + \mathcal{I}(i)$ ,  $\mathcal{S}(i) = \text{Vor}(\mathcal{M}(i))$ , et  $\mathcal{E}(i+1) = \mathcal{S}(i)\mathcal{M}(i)$ , où  $\text{Vor}(\mathcal{M}(i))$  est le point de  $C_\alpha(\mathcal{P}_{\alpha(i)})$  le plus proche de  $\mathcal{M}(i)$ , avec une *règle de levée des ambiguïtés* (supposée ici déterministe pour fixer les idées).

Dans le cas d'un seul polytope, nous reconnaissons dans nos AGs le processus de DE sous sa forme la plus simple. En fait le cas  $\delta = 1$  correspond au cas d'école des images unidimensionnelles. Les résultats de la théorie unidimensionnelle s'adaptent à l'impression sur une page où l'on utilise la formule :

$$\mathcal{M}(h, v) = \mathcal{I}(h, v) + \sum_{(h-i, v-j) \text{ dans un voisinage déjà traité par l'AG}} a_{(i,j)} \mathcal{E}(h-i, v-j), \tag{2}$$

où  $(h, v)$  représente le pixel de coordonnée horizontale  $h$  et de coordonnée verticale  $v$  et où la somme des  $a_{(i,j)}$  est 1. La réduction de la formule utilisée en imprimerie digitale au cas d'école provient du caractère borné de l'erreur garanti par notre Corollaire 1.4 (qui vient de [1]) dès que l'on suppose que l'ensemble borné invariant de vecteurs, dont l'existence résulte de ce corollaire, est convexe. La convexité dans  $\mathcal{A}^\delta$  permet de se passer de convexité dans  $\mathbb{R}^\delta$  dans le cas d'un seul polytope, puisqu'avec les notations de 2, on a :

$$\mathcal{I}(h, v) + \sum a_{(i,j)} \mathcal{E}(h-i, v-j) = \sum a_{(i,j)} (\mathcal{I}(h, v) + \mathcal{E}(h-i, v-j)), \tag{3}$$

quand la somme des  $a_{(i,j)}$  est 1.

La convexité du domaine invariant dans le Théorème 1.3 étant importante pour les applications à l'imprimerie (voir par exemple [2]); on montre dans [12] que l'existence d'un domaine invariant implique l'existence d'un

domaine invariant convexe. Nous n'avons pas la possibilité de récupérer une telle propriété de convexité dans le cas de plusieurs polytopes. Nous savons cependant que la propriété  $\sum a_i = 1$  n'est pas indispensable et doit parfois même être abandonnée pour une meilleure image [17].

Nous reconnaissons aussi dans l'AG quand  $\delta = 1$  la  $\sigma - \Delta$  modulation, autre technique de conversion analogique-digital qui intervient en traitement du signal (voir par exemple [5] pour des résultats récents), technique qui se confond avec la DE dans le cas le plus simple (on pourra comparer la formule 8 de [5] à notre formule 5).

Dans la plupart des cas, les polytopes utilisés sont simplement l'intervalle quand on traite des signaux unidimensionnels et le cube  $[0, 1]^\delta$  quand on traite des signaux de dimension  $\delta$  dans le cas de l'image couleur où  $\delta = 3$  (on ne confondra pas  $\delta$  avec la dimension de la page !). Les simplexes autres que des intervalles sont utilisés plutôt dans des contextes d'ordonnancement plus standards comme le problème d'ordonnancement des présidents (voir [16] pour la norme du sup, [9] pour la norme euclidienne, et les références citées).

L'étude de nos AGs est aussi fermement ancrée dans des domaines classiques des mathématiques. Dans le cas  $\delta = 1$  où la donnée est constante dans un intervalle, nos AGs redonnent toutes les suites dites sturmiennes non exceptionnelles (voir [10] et, pour la correspondance avec les fractions continues, voir [3] ainsi que [14] qui renvoie à la littérature). Nos AGs sont des exemples de généralisations en dimension  $\delta$  quelconque des échanges d'intervalles, un sujet dont l'exploration pour  $\delta = 1$  a commencé dans les années 70 (voir [8]).

Avec un ou plusieurs polytopes, les AGs que nous avons décrits peuvent s'interpréter comme des systèmes dynamiques dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^\delta$  où vivent les vecteurs erreurs [11,12]. Ces AGs minimisent l'erreur :

$$\mathcal{E}(i+1) = \mathcal{M}(i) - \mathcal{S}(i) = \mathcal{E}(i) + \mathcal{I}(i) - \mathcal{S}(i) = \mathcal{E}(0) + \sum_{j=0}^i (\mathcal{I}(j) - \mathcal{S}(j)). \quad (4)$$

En posant :  $\gamma = \mathcal{I}(i)$ , l'évolution du vecteur erreur  $\mathbf{v} = \mathcal{E}(i)$  est gouvernée par le système dynamique dépendant du temps dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^\delta$  :

$$G_{\gamma;\alpha}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\gamma - \text{Vor}(\mathbf{v} + \gamma)). \quad (5)$$

Dans l'espace affine  $\mathcal{A}^\delta$  l'évolution des données modifiées peut elle aussi être interprétée de façon dynamique [2]. Nous avons :

$$\mathcal{M}(i+1) = \mathcal{E}(i+1) + \mathcal{I}(i+1) = \mathcal{M}(i) - \text{Vor}(\mathcal{M}(i)) + \mathcal{I}(i+1), \quad (6)$$

formule itérative qui exprime  $\mathcal{M}(i+1)$  comme fonction de  $\mathcal{M}(i)$  dépendant de la donnée  $\mathcal{I}(i)$ . Posant  $x = \mathcal{M}(i)$  et  $\gamma = \mathcal{I}(i+1)$ , nous obtenons le système dynamique suivant dans l'espace affine  $\mathcal{A}^\delta$  :

$$F_{\gamma;\alpha}(x) = (x - \text{Vor}(x)) + \gamma = x + (\gamma - \text{Vor}(x)). \quad (7)$$

Dans le cas d'un seul polytope (où nous pouvons omettre l'indice  $\alpha$ ), la correspondance entre  $G_\gamma : \mathbb{R}^\delta \rightarrow \mathbb{R}^\delta$  et  $F_\gamma : \mathcal{A}^\delta \rightarrow \mathcal{A}^\delta$  est la semi-conjugaison  $x \mapsto \mathbf{v} = x - \text{Vor}(x)$ . Il se trouve que le facteur  $G_\gamma$  détermine son extension  $F_\gamma$  de façon unique. La relation entre les deux dynamiques est décrite très précisément dans [12]. Dans le cas de plusieurs polytopes, la dynamique de  $F_\gamma$  ne jouit pas d'une description aussi simple.

**Définition 1.2 (Ensembles invariants).** On dit que  $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^\delta$  est un ensemble de vecteurs invariant par la famille (à deux indices)  $G_{\gamma;\alpha}$  si  $\bigcup_{\alpha \in A} (\bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}_\alpha} G_{\gamma;\alpha}(\mathbf{V})) \subset \mathbf{V}$ . Etant donnée une famille de polytopes  $\mathcal{P}_\alpha$ , on dit que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}^\delta$  est une région invariante par la famille d'applications  $F_{\gamma;\alpha}$ , ou encore que  $\mathcal{Q}$  est une région invariante pour la famille de polytopes  $\mathcal{P}_\alpha$ , si l'on a  $\bigcup_{\alpha \in A} (\bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}} F_{\gamma;\alpha}(\mathcal{Q})) \subset \mathcal{Q}$ . Ensemble invariant désigne l'un des deux ensembles que l'on vient de définir.

En particulier, la relation entre région invariante  $\mathcal{Q}$  et ensemble de vecteurs invariant  $\mathbf{V}$  est très simple dans le cas d'un seul polytope :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{V} = \bigcup_{c \text{ un coin de } \mathcal{P}} (\mathcal{Q} \cap \mathbf{V}(c) - c), \quad (8)$$

où, bien sûr,  $\mathcal{Q} \cap \mathbf{V}(c) - c$  représente l'ensemble des vecteurs de la forme  $x - c$  avec  $c \in \mathcal{Q} \cap \mathbf{V}(c)$ .

Ainsi, par exemple, le caractère borné de l'AG dans le cas d'un seul polytope  $\mathcal{P}$  peut s'exprimer comme existence d'une région invariante bornée  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathcal{A}^\delta$ , ou de façon équivalente, comme l'existence d'un ensemble de vecteurs invariant borné  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbb{R}^\delta$ . De là l'importance du Théorème 1.3. Comme on va le voir dans la section suivante, seule la notion d'ensemble de vecteurs invariant  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbb{R}^\delta$  reste utile dans le cas général de plusieurs polytopes.

**Théorème 1.3** (Existence de domaines convexes invariants et bornés [1]). *Pour chaque polytope convexe  $\mathcal{P}$  il existe une région convexe bornée  $\mathcal{Q}$  contenant  $\mathcal{P}$  et invariante au sens où :*

$$\bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}} F_\gamma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}. \quad (9)$$

De plus,  $\mathcal{Q}$  peut être choisi pour contenir n'importe quel compact choisi à l'avance.

**Corollaire 1.4.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3, la suite des normes des erreurs est uniformément bornée.*

## 2. Non-existence de régions invariantes dans les cas de plusieurs polytopes

Il est prouvé aussi dans [1] que pour toute collection finie de polytopes  $\{\mathcal{P}_j \mid j \in J; \#(J) < \infty\}$ , il existe une région simultanément invariante par chacune des applications  $F_{\gamma;i}$  où  $i \in J$ . Par contre :

**Théorème 2.1** (Non existence d'une région invariante dans le cas général). *Considérons une famille de polytopes  $\{\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{A}^\delta; \alpha \in A\} \subset \mathcal{A}^\delta$  dont les dimensions sont inférieures ou égales à  $\delta$ , et telle que deux au moins de ces polytopes ont des fermetures distinctes. Alors, il n'existe pas de région invariante bornée dans  $\mathcal{A}^\delta$  pour la famille d'applications  $G_{\gamma;\alpha}$ .*

Nous présentons ici une esquisse de la démonstration en ignorant dans le cas  $\delta \geq 2$ , les difficultés (non réductibles pour la démonstration) liées aux bords des polytopes.

**Démonstration.** Notons tout d'abord que s'il n'y a pas d'ensemble de vecteurs invariant borné, il n'y a rien à démontrer.

*Le cas  $\delta = 1$  :* La suite de polytopes contient au moins deux intervalles de fermetures distinctes,  $((a, b))$  et  $((c, d))$  où nous utilisons des doubles parenthèses pour signifier « ( ou [ » à gauche et « ) ou ] » à droite. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que les deux intervalles sont distincts à droite et donc que  $b > d$ . Soit  $\mathcal{Q} = ((\mu, \nu))$  le candidat région invariante. Il existe alors des vecteurs erreur  $\mathbf{v}_\beta$  de longueur aussi proche qu'on veut de  $\nu - d$ , donc plus longs que  $\nu - b$ , ce qui donne des points  $\mathbf{v}_\beta + b + \epsilon$  qui sont à la fois hors de  $((\mu, \nu))$  et dans  $\mathcal{Q}$ , contradiction qui achève la démonstration dans le cas de la dimension 1. Cet argument, assez algébrique, a une version (équivalente) plus géométrique, un peu plus complexe mais qui s'adapte mieux en dimension supérieure ; on procède comme suit :

Le point le plus à droite de la fermeture de  $\mathcal{Q}$  s'obtient en ajoutant le vecteur erreur positif  $\mathbf{v}$  le plus long (à la fermeture près de l'ensemble des vecteurs invariants), au point le plus à droite de  $((a, b)$  ou  $((c, d)$  et donc un vecteur erreur  $\mathbf{v} = \nu - b = \nu - d$  avec  $d = b$ . Sinon, supposant par exemple  $b > d$ , on aurait (à la fermeture près de l'ensemble des vecteurs invariants), un vecteur erreur de longueur  $\nu - d > \|\mathbf{v}\|$ , d'où la contradiction.

*Le cas  $\delta \geq 2$  :* Supposons pour simplifier que tous les polytopes  $\mathcal{P}_\alpha$  sont fermés. La suite de polytopes contient alors deux polytopes compacts distincts. Soit  $\mathcal{Q}$  un candidat région invariante,  $\overline{\mathcal{Q}}$  sa fermeture et  $\mathbf{V}$  la fermeture de l'ensemble des vecteurs invariants. Choisissons une direction donnée par un vecteur de longueur unité  $\mathbf{w}$ . L'un des

points le plus loin,  $v_w$ , de  $\overline{Q}$  dans la direction de  $w$  peut s'obtenir à partir d'un point  $b_w$  de  $\mathcal{P}_1$  et d'un point  $d_w$  de  $\mathcal{P}_2$ . Nous prétendons que  $b_w$  et  $d_w$  sont aussi loin l'un que l'autre dans la direction de  $w$ . En effet, si ce n'était pas le cas, l'un des deux vecteurs,  $b_w$  par exemple, serait plus loin que  $d_w$  dans la direction de  $w$ . Soit alors  $c_w$  le sommet de  $\mathcal{P}_2$  le plus proche de  $v_w$ . Par définition de  $d_w$ , la distance de  $c_w$  à  $v_w$  dans la direction de  $w$  est au moins la distance de  $d_w$  à  $v_w$  dans la direction de  $w$ . Or  $\overline{c_w v_w}$  est un vecteur erreur, et  $b_w + \overline{c_w v_w}$  est à la fois dans  $\overline{Q}$  et plus loin que  $v_w$  dans la direction de  $w$ , d'où la contradiction.

Ayant obtenu que  $b_w$  et  $d_w$  sont aussi loin l'un que l'autre dans la direction de  $w$ , nous remarquons qu'une conclusion similaire vaut aussi dans toutes les autres directions, ce qui implique que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont identiques (puisque un polytope est l'intersection des demi-espaces auquel il appartient : voir par exemple [13] – et ses références – pour des généralités sur la géométrie convexe) contrairement à l'hypothèse.  $\square$

Nous montrerons ailleurs que des ensembles bornés de vecteurs invariants par la famille  $G_{\gamma;\alpha}$  existent en toute généralité, au moins sous l'hypothèse d'une famille finie de polytopes. En attendant, il est important de constater que de tels ensembles bornés de vecteurs invariants existent dans des cas où le Théorème 2.1 garantit la non-existence de région invariante bornée dans  $\mathcal{A}^\delta$ . Il existe même des exemples pour des familles infinies. Il suffit en effet de commencer par la dimension 1 et de prendre une infinité d'intervalles distincts ; des cas simples en dimension quelconque s'en déduisent trivialement. Moins simple est le cas des simplexes et de leurs faces en toutes dimensions : des bornes sont présentées pour ce cas dans [4].

## Remerciements

L'auteur a bénéficié de conversations avec R. Adler, D. Coppersmith, M. Martens, G. Paleologo, T. Nowicki, M. Shub, S. Winograd, et C.W. Wu. Il remercie aussi J.M. Gambaudo et Y. Meyer pour leur support et conseils pour cette Note, ainsi que Léa, Yuval, Ygaël et Liza Tresser sans qui ces dernières années lui eussent été impossibles.

## Références

- [1] R. Adler, B. Kitchens, M. Martens, C. Pugh, M. Shub, C. Tresser, Geometric analysis of a greedy algorithm: there exist convex invariant regions (2003) à paraître.
- [2] R.L. Adler, B.P. Kitchens, M. Martens, C.P. Tresser, C.W. Wu, The mathematics of halftoning, IBM J. Res. & Dev. 47 (2003) 1–9.
- [3] J. Bernoulli, Sur une nouvelle espèce de calcul, Recueil Astron. (Berlin) 1 (1772) 255–284.
- [4] D. Coppersmith, T. Nowicki, G. Paleologo, C. Tresser, C.W. Wu, en préparation.
- [5] I. Daubechies, R. DeVore, Approximating a bandlimited function using very coarsely quantized data: a family of stable sigma-delta modulators of arbitrary order, Ann. of Math. 158 (2003) 643–674.
- [6] R. Floyd, L. Steinberg, An adaptive algorithm for spatial grey scale, in: SID Symposium Digests of Papers, 1975, pp. 36–37.
- [7] J.F. Jarvis, C.N. Judice, W.H. Ninke, A survey of techniques for the display of continuous tone pictures on bilevel displays, Computer Graphics and Image Processing 5 (1976) 13–40.
- [8] M. Keane, Interval exchange transformations, Math. Z. 141 (1975) 25–31.
- [9] M. Martens, T. Nowicki, C. Tresser, C.W. Wu, Convex dynamics: bounds for scheduling, à paraître.
- [10] M. Morse, G.A. Hedlund, Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, Amer. J. Math. 62 (1940) 1–42.
- [11] T. Nowicki, C. Tresser, Convex dynamics: unavoidable difficulties in bounding some greedy algorithms, Chaos, à paraître.
- [12] T. Nowicki, C. Tresser, Convex dynamics: properties of invariant sets, à paraître.
- [13] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley, Chichester, NY, 1986.
- [14] R.M. Siegel, C. Tresser, G. Zettler, A decoding problem in dynamics and in number theory, Chaos 2 (1992) 473–493.
- [15] J.R. Sullivan, R.L. Miller, T.J. Wetzel, Color digital halftoning with vector error diffusion, US Patent 5070413, 1991.
- [16] R. Tijdeman, The chairman assignment problem, Discrete Math. 32 (1980) 323–330.
- [17] C.P. Tresser, C.W. Wu, Target patterns controlled error management, US Patent 6101001, 2000.