Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 591–594
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre

Automorphismes des algèbres cubiques

Todor Popov

Institut de recherches nucléaires, Académie des sciences Bulgare, BG-1784, Sofia, Bulgarie

Reçu le 20 janvier 2004 ; accepté le 10 février 2004

Présenté par Alain Connes

Résumé

Manin associe à une algèbre quadratique (espace quantique) le groupe quantique matriciel de ses automorphismes. L'objectif de cette Note est de montrer que la construction de Manin peut s'étendre pour des espaces quantiques qui sont des algèbres homogènes non-quadratiques. La classification d'Artin–Schelter des algèbres régulières de dimension globale trois contient deux types d'algèbres : quadratiques et cubiques. Ewen et Ogievetsky ont classifié les groupes quantiques matriciels qui sont des déformations de $\mathrm{GL}(3)$ correspondant aux algèbres quadratiques dans la classification. Dans cette Note on considère en tant qu'espaces quantiques les algèbres cubiques d'Artin–Schelter et on construit des algèbres de Hopf de leurs automorphismes. ***Pour citer cet article : T. Popov, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Automorphisms of cubic algebras. Manin associated to a quadratic algebra (quantum space) the quantum matrix group of its automorphisms. This Note aims to demonstrate that Manin's construction can be extended for quantum spaces which are non-quadratic homogeneous algebras. The Artin–Schelter classification of regular algebras of global dimension three contains two types of algebra: quadratic and cubic. Ewen and Ogievetsky classified the quantum matrix groups which are deformations of $\mathrm{GL}(3)$ corresponding to the quadratic algebras in the Artin–Schelter classification. In this Note we consider the cubic Artin–Schelter algebras as quantum spaces and construct Hopf algebras of their automorphisms. ***To cite this article: T. Popov, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Les espaces vectoriels, les algèbres, etc. considérés ici sont tous sur un corps $\mathbb{K}$ fixé de caractéristique 0. On adopte dans toute cette Note la convention d'Einstein de sommation des indices répétés.

Une algèbre N-homogène [2,3] est une algèbre de la forme $\mathcal{A} = A(E,R) = T(E)/(R)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie, $T(E)$ son algèbre tensorielle et (R) l'idéal bilatère engendré par un sous-espace $R \subset E^{\otimes N}$. Le dual $\mathcal{A}^!$ de $\mathcal{A} = A(E,R)$ est défini comme l'algèbre N-homogène $\mathcal{A}^! = A(E^*, R^\perp)$ où E^* est le dual de E et $R^\perp \subset E^{*\otimes N} = (E^{\otimes N})^*$ est l'annulateur de R. On a $(\mathcal{A}^!)^! = \mathcal{A}$.

Pour deux algèbres N-homogènes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ on définit l'algèbre N-homogène $\mathcal{A} \bullet \mathcal{A}'$ par

$$\mathcal{A} \bullet \mathcal{A}' = A\big(E \otimes E', \pi_N(R \otimes R')\big),$$

Adresse e-mail : tpopov@inrne.bas.bg (T. Popov).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.02.007

où π_N est la permutation $\pi_N(e_1 \otimes \cdots \otimes e_N \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_N) = e_1 \otimes e'_1 \cdots e_N \otimes e'_N$.

L'algèbre $end(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^! \bullet \mathcal{A}$ est munie canoniquement d'une structure de bigèbre [3,8] avec coproduit Δ et co-unité ε tels que $\Delta(u_i{}^j) = u_i{}^k \otimes u_k{}^j$ et $\varepsilon(u_i{}^j) = \delta_i{}^j$. L'algèbre $\mathcal{A}$ est un comodule à gauche sur $end(\mathcal{A})$ [3,8] avec coaction δ telle que

$$\delta(x_i) = u_i{}^j \otimes x_j. \tag{1}$$

De même $\mathcal{A}^!$ est un comodule à gauche pour $end(\mathcal{A}^!) = \mathcal{A} \bullet \mathcal{A}^!$ avec

$$\delta(\xi^i) = \sum_j \breve{u}^j{}_i \otimes \xi^j. \tag{2}$$

On identifie les espaces sous-jacents de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^!$, donc $end(\mathcal{A})$ et $end(\mathcal{A}^!)$ au moyen de la forme bilinéaire $g^{ij} = \delta^{ij}$,

$$\xi^i = g^{ij} x_j = x_i, \qquad \breve{u}^k{}_l = g^{ik} u_i{}^j g_{jl} = u_k{}^l \tag{3}$$

et on désigne par $e(\mathcal{A})$ la bigèbre ainsi obtenue (quotient de $end(\mathcal{A})$ et $end(\mathcal{A}^!)$).

Une algèbre graduée $\mathcal{A}$ est régulière de dimension d au sens de Artin–Schelter [1] quand elle satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\mathcal{A}$ est de dimension homologique globale finie d ($g\ell$-dim $\mathcal{A} = d$),
(ii) $\mathcal{A}$ est à croissance polynomiale (i.e., gk-dim $\mathcal{A} < \infty$),
(iii) $\mathcal{A}$ est Gorenstein (i.e., on a $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}, \mathcal{A}) = \delta_{d,q}\mathbb{K}$).

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre N-homogène régulière, son dual $\mathcal{A}^!$ est une algèbre de Frobenius [4]. En particulier on a $\dim \mathcal{A}^!_m = 1$ pour $m = \max\{i \mid \mathcal{A}^!_i \neq 0\}$.

À chaque algèbre N-homogène on associe canoniquement un complexe de Koszul $L'(\mathcal{A}) = C_{1,0}(L(\mathcal{A}))$ (voir l'appendice de [5] et [3,4]). Si $\mathcal{A}$ est N-homogène et régulière de dimension globale d alors la propriété de Gorenstein implique que $L'(\mathcal{A})$ fournit une résolution de $\mathbb{K}$, i.e., $H(L'(\mathcal{A})) = H^d(L'(\mathcal{A})) = \mathcal{A}^!_m \simeq \mathbb{K}$.

Donc la cohomologie de $L'(\mathcal{A})$ est un $e(\mathcal{A})$-comodule unidimensionel $\mathcal{A}^!_m$ sur lequel $e(\mathcal{A})$ coagit par l'élément $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ qu'on appellera le *quasi-déterminant homologique*

$$\delta : \mathcal{A}^!_m \to e(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}^!_m, \qquad \delta\big(\omega(\mathcal{A})\big) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \otimes \omega(\mathcal{A}). \tag{4}$$

Dans le cas quadratique $N = 2$, $\mathcal{D}$ coïncide avec le *déterminant homologique* [8].

Lemme 1. *Soit* $\omega(\mathcal{A}) = \omega_{a_1 \ldots a_m} \xi^{a_1} \ldots \xi^{a_m}$. *Si* $\mathcal{K} = \omega^A \omega_A \in \mathbb{K}$ *est inversible alors*

$$\mathcal{D} = \mathcal{K}^{-1} \omega^A u_A{}^B \omega_B = \mathcal{K}^{-1} \omega^{a_1 \ldots a_m} u_{a_1}{}^{b_1} \ldots u_{a_m}{}^{b_m} \omega_{b_1 \ldots b_m} \tag{5}$$

et l'on a $\Delta(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ *et* $\varepsilon(\mathcal{D}) = 1$.

Démonstration. En vertu de (2) la coaction de $e(\mathcal{A})$ sur $\omega \in \mathcal{A}^!_m$ (4) prend la forme

$$\begin{aligned} & u_A{}^B \omega_B = \mathcal{D}\omega_A \quad \text{d'où } \omega^A u_A{}^B \omega_B = \mathcal{D}\omega^A \omega_A = \mathcal{K}\mathcal{D}, \\ & \Delta(\mathcal{D}) = \mathcal{K}^{-1} \omega^A u_A{}^C \otimes u_C{}^B \omega_B = \mathcal{K}^{-1} \mathcal{D} \omega^C \otimes u_C{}^B \omega_B = \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}, \\ & \varepsilon(\mathcal{D}) = \mathcal{K}^{-1} \omega^A \varepsilon(u_A{}^B) \omega_B = \mathcal{K}^{-1} \omega^A \delta_A{}^B \omega_B = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

La classification [1] des algèbres régulières de dimension globale 3 contient des algèbres homogènes quadratiques ($N = 2$) et cubiques ($N = 3$). Elle repose sur le fait que l'espace $\mathcal{A}^!_m$ de dimension 1 est de la forme particulière (Proposition 2.4 de [1])

$$\mathcal{A}^!_m = E^* \otimes R^* \cap R^* \otimes E^*, \quad m = N + 1. \tag{7}$$

Les coordonnées de $\omega(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}^!_{N+1}$ dans une base fixée sont une représentation du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{N+1}$ agissant sur les indices de $\omega(\mathcal{A}) = \omega_I \xi^I$,

$$\sigma(\omega_{i_1 i_N i_{N+1}}) = \omega_{i_{N+1} i_1 i_N} = \omega_{\sigma^{-1}(I)}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}_{N+1}.$$

En vertu de (7) on peut écrire l'invariant ω de deux manières

$$\omega = \xi^i f_i^* = g_i^* \xi^i = Q_i^j f_j^* \xi^i, \tag{8}$$

où $g_i = Q_i^j f_j$ est une autre base de R.

Par changement des bases on peut amener la matrice Q dans la forme canonique de Jordan. Artin et Schelter ont demontré que les Q non-diagonales n'apportent pas des nouvelles algèbres régulières par rapport aux cas Q diagonales [1].

Donc il suffit de regarder les cas où les matrices Q sont diagonales telles que $\sigma^{N+1} = 1$,

$$\sigma(\omega_{Ai}) = \omega_{iA} = Q_{ii}\omega_{Ai} \quad \text{telles que } \prod_{k=1}^{N+1} Q_{i_k i_k} = 1. \tag{9}$$

Les types d'algèbres dans la classification [1] correspondent aux $\mathbb{Z}_{N+1}$-représentations (Q, ω) irreductibles, il existe 7 (6) représentations (Q, ω) de $\mathbb{Z}_3$ $(\mathbb{Z}_4)$. Ewen et Ogievetsky [7] ont classifié les groupes quantiques matriciels qui sont des déformations de $\mathrm{GL}(3)$ correspondant aux algèbres quadratiques dans la classification [1].

Par la suite, $\mathcal{A}$ désigne une des algèbres cubiques régulières du type A, E, H, S_1, S_2 ou S_2' répertoriées dans la table (3.9) de [1] avec leurs données (Q, ω). L'algèbre $\mathcal{A}$ a deux générateurs $E = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y$, deux relations $R = \mathbb{K}f_1 \oplus \mathbb{K}f_2$ et

$$\omega = \xi f_1^* + \eta f_2^* = g_1^* \xi + g_2^* \eta = Q_{11} f_1^* \xi + Q_{22} f_2^* \eta, \quad \omega \in \mathcal{A}^!_4. \tag{10}$$

Proposition 2. *La bigèbre $e(\mathcal{A})$ est un monoïde à gauche (à droite) de Cramer quand il existe des éléments adjoints à gauche (à droite) tels que*

$$\mathcal{S}_g\big(u_j{}^k\big)u_k{}^i = \mathcal{D}\delta^i_j = \mathcal{D}\varepsilon\big(u_j{}^i\big) \quad \big(= u_j{}^k \mathcal{S}_d\big(u_k{}^i\big)\big). \tag{11}$$

L'algèbre $\mathcal{A}$ est dite générique quand les coefficients κ_1 et κ_2 $(\tilde{\kappa}^1$ et $\tilde{\kappa}^2)$ sont non-nuls

$$\kappa_j = \omega^A{}_j \omega_{Aj} \neq 0 \quad \big(\tilde{\kappa}^i = \omega^{iA}\omega^i{}_A \neq 0\big). \tag{12}$$

Pour $\mathcal{A}$ générique les éléments adjoints à gauche (à droite) sont définis par

$$\mathcal{S}_g\big(u_j{}^i\big) = (\kappa_j)^{-1}\omega^{Ai} u_A{}^B \omega_{Bj} \quad \big(\mathcal{S}_d\big(u_j{}^i\big) = \big(\tilde{\kappa}^i\big)^{-1}\omega^{iA} u_A{}^B \omega_{jB}\big). \tag{13}$$

Démonstration. Pour $\mathcal{A}$ générique on vérifie que $\omega^{Ai}\omega_{Aj} = \kappa_j \delta^i_j$ avec $\kappa_j \neq 0$ donc on a

$$\mathcal{S}_g\big(u_j{}^k\big)u_k{}^i = (\kappa_j)^{-1}\omega^{Ak} u_{Ak}{}^{Bi} \omega_{Bj} = \mathcal{D}\omega^{Bi}\omega_{Bj}(\kappa_j)^{-1} = \mathcal{D}\delta^i_j = \mathcal{D}\varepsilon\big(u_j{}^i\big). \tag{14}$$

Les algèbres $\mathcal{A}$ du type E, H et les points particuliers des types A, S_1 et S_2 où les conditions (12) ne sont pas satisfaites sont dites non génériques.

Proposition 3. *Dans le monoïde de Cramer $e(\mathcal{A})$ pour $\mathcal{A}$ générique l'élément adjoint à gauche $\mathcal{S}_g(u_j{}^i)$ est lié à l'élément adjoint à droite $\mathcal{S}_d(u_j{}^i)$ via la relation*

$$\mathcal{S}_g\big(u_j{}^i\big) = h^{i-j}\mathcal{S}_d\big(u_j{}^i\big), \tag{15}$$

où $h = 1$ pour $\mathcal{A}$ des types A et S_1, $h = -1$ pour S_2 et $h = -2/3$ pour S_2'.

Démonstration. Calcul direct en utilisant la cyclicité (9), $\sigma(\kappa_i) = \tilde{\kappa}^i = (Q_{ii})^2\kappa_i$.

Corollaire 4. *Le quasi-determinant $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (pour $\mathcal{A}$ générique) est un élément quasi-central du monoïde de Cramer $e(\mathcal{A})$,*

$$u_i{}^j\mathcal{D} = h^{i-j}\mathcal{D}u_i{}^j. \tag{16}$$

Démonstration. Résulte de l'associativité en utilisant la structure de monoïde de Cramer.

Théorème 5. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre cubique régulière de dimension globale* 3 *parmi les* (*points génériques des*) *types A, S_1, S_2, S_2'* [1]. *Soit $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ la bigèbre $e(\mathcal{A})$ à laquelle on a adjoint l'inverse $\mathcal{D}^{-1}$ de $\mathcal{D}$ avec $\Delta(\mathcal{D}^{-1}) = \mathcal{D}^{-1} \otimes \mathcal{D}^{-1}$ et $\varepsilon(\mathcal{D}^{-1}) = 1$. Alors $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est une algèbre de Hopf avec antipode $\widetilde{\mathcal{S}}$ définie par*

$$\widetilde{\mathcal{S}}\big(u_i{}^j\big) = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{S}_g\big(u_i{}^j\big) = \mathcal{S}_d\big(u_i{}^j\big)\mathcal{D}^{-1} \tag{17}$$

et l'on a $\widetilde{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^{-1}$.

Démonstration. En vertu de (11) la structure de bigèbre $e(\mathcal{A})$ est compatible avec l'antipode

$$m \circ (\mathrm{Id} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}) \circ \Delta = m \circ (\widetilde{\mathcal{S}} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon, \tag{18}$$

où m et η désignent la multiplication et l'unité de l'algèbre $e(\mathcal{A})$. En appliquant la condition de compatibilité (18) sur $\mathcal{D}$ on obtient

$$\widetilde{\mathcal{S}}(\mathcal{D})\mathcal{D} = \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) = \eta \circ \varepsilon(\mathcal{D}) = 1_{e(\mathcal{A})} \tag{19}$$

en utilisant (6) et $\eta : 1 \mapsto 1_{e(\mathcal{A})}$. Donc $\widetilde{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^{-1}$.

On s'attend à ce que toutes les $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ soient à croissance polynomiale. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est du type S_2 on peut montrer que gk-dim $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = 7$ (dommage que ce ne soit pas $9 = 3^2$) ; ceci pourrait être vrai en général.

Parmi les algèbres du type S_1 on trouve les cas les plus simples des algèbres de Heisenberg [1], de Yang–Mills [5] ainsi que des algèbres liées à la parastatistique [6].

Références

[1] M. Artin, W.F. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, Adv. Math. 66 (1987) 171–216.
[2] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras, J. Algebra 239 (2001) 705–734. Erratum, J. Algebra.
[3] R. Berger, M. Dubois-Violette, M. Wambst, Homogeneous algebras, J. Algebra 261 (2003) 172–185.
[4] R. Berger, N. Marconnet, Koszul and Gorenstein properties for homogeneous algebras, math.QA/0310070.
[5] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang–Mills algebra, Lett. Math. Phys. 61 (2002) 149–158.
[6] M. Dubois-Violette, T. Popov, Homogeneous algebras, statistics and combinatorics, Lett. Math. Phys. 61 (2002) 159–170.
[7] H. Ewen, O. Ogievetsky, Classification of the GL(3) quantum matrix groups, q-alg/9412009.
[8] Yu.I. Manin, Quantum Groups and NC Geometry, CRM Univ. de Montréal, 1988.