

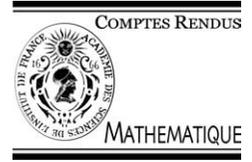


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 899–904



Analyse numérique/Systèmes dynamiques

Sur une variante de la méthode des boîtes pour la détermination numérique de la dimension fractale d'un sous-ensemble du plan

Nourredine Akroune

Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur, laboratoire de mathématiques appliquées, Université de Béjaïa, Targa, Ouzemour, 06000 Béjaïa, Algérie

Reçu le 24 septembre 2003 ; accepté après révision le 24 février 2004

Disponible sur Internet le 17 avril 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Dans ce travail, nous proposons une discrétisation particulière de la taille des grilles pour le calcul numérique de la dimension fractale d'un sous-ensemble du plan par la méthode des boîtes (dite du « box-counting » en anglais). Le procédé qui en découle est d'exploitation simple et expérimentalement efficace ; l'illustration en est faite sur des fractales engendrées par des systèmes dynamiques discrets. **Pour citer cet article :** *N. Akroune, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On a variation of the box-counting method for the numerical determination of the fractal dimension of a subset in 2D space. In this work, we propose a particular discretization of the size of the grids in order to compute numerically, by the box-counting algorithm, the fractal dimension of a subset in two-dimensional space. The efficiency of the associated method is successfully tested on various examples of fractal sets which are derived from discrete dynamical systems. **To cite this article:** *N. Akroune, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The problem

The aim of this Note is to expose a new approach using the box-counting algorithm to estimate the fractal dimension of the set E , where E is a bounded subset of a two-dimensional Euclidean space (for example: chaotic attractor of a dissipative dynamical system, Julia set of a polynomial, etc.). More precisely, we take an interest in the box dimension ($\dim_B(E)$) (1) and the information dimension ($\dim_i(E)$) (2). In these definitions, $T(\varepsilon)$ is the number of boxes needed to recover the set E and ε the side length of the box.

Adresse e-mail : akroune_n@yahoo.fr (N. Akroune).

The preprocessing notion

Consider a square domain $D = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ containing the N points of E . We divide D into $(n \cdot m)$ boxes of sides ε_x and ε_y (see Fig. 1). Preprocessing the N points of E according to this fixed grid is an operation which allows us to report ‘rapidly’ the points of $(E \cap r)$ for any box r in the grid. We therefore obtain the $(n \cdot m)$ integers $(\text{card}(E \cap r_{ij}) = |r_{ij}|)$ $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$. Note that the complexity of the preprocessing stage is $O(N + n \cdot m)$.

A new approach using the box-counting algorithm

We choose a number $((n = m) = n_1)$ of subdivisions along $[X_1, X_2]$ (and $[Y_1, Y_2]$) such that n_1 admits a maximal number of divisors $(n_s)_{s=1, \dots, p}$ to which we associate the sides $\varepsilon_s = (X_2 - X_1)/n_s$.

The main result of this work can be summarized as follows (Proposition 4.1):

The preprocessing operation is carried out only for the grid of side ε_1 , and the use of (Eq. (3)) permits us to calculate all the remaining quantities $T(\varepsilon_s)_{s=2, \dots, p}$ and $H(\varepsilon_s)_{s=2, \dots, p}$ without any other test on the N points of the set E .

Numerical results

The application of our algorithm to two different examples (the Henon attractor and the Julia set of $P(z) = z^2 + 0.1$) gives results which are in agreement to those found in the literature. This observation is confirmed by the diagrams shown in Fig. 2.

1. Introduction

1.1. Ensembles fractals, dimension fractale

Pour une étude fine des ensembles de mesure de Lebesgue nulle, la notion de géométrie fractale a été introduite dans les années 1975 par B. Mandelbrot et a été reprise dans plusieurs de ses livres dont celui de 1984 [11]. Actuellement, l’utilisation et les applications des fractales se retrouvent dans divers secteurs des sciences et techniques [7].

La connaissance, entre autres, de la dimension d’une fractale F donnée, est nécessaire pour caractériser ses propriétés. Elle quantifie le degré d’irrégularité de F et rend compte, dans le cas où F est engendrée par un système dynamique (cf. [2–4]), de la densité des points de F dans l’espace des phases.

1.2. Position du problème

Considérons un sous-ensemble E borné du plan : attracteur étrange de système dynamique dissipatif [5], ensemble de Julia de polynôme [2], etc. Dans ce travail, on utilise la méthode des boîtes, qui est basée sur le comptage de cellules d’une grille contenant E . Cette méthode est particulièrement adaptée à l’évaluation de la dimension fractale de E $\dim_B(E)$ (notée \dim_B dans la suite) et de la dimension d’information $\dim_i(E)$ (notée \dim_i) de E [6].

2. Deux définitions de la dimension fractale – Rappels [14,8]

L’ensemble E , approché au préalable par un ensemble formé de N de points, est ensuite immergé dans une grille de taille ε , c.a.d. dont chaque cellule est carrée et a pour côté ε .

2.1. Dimension de boîte (\dim_B) de E

Si $T(\varepsilon)$ est le nombre de cellules non vides (contenant donc au moins un point de E), alors :

$$\dim_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(T(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (\text{lorsque la limite existe}) \tag{1}$$

autrement dit, pour ε voisin de 0, $T(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\dim_B}$.

2.2. Dimension d'information (\dim_i) de E

Pour la définir, distinguons deux cas :

- Cas 1 : E est un attracteur étrange de système dynamique dissipatif (discret ou continu).
On suppose l'existence d'une mesure naturelle μ sur E , pour laquelle $\mu(r)$ désigne la proportion du temps de séjour, ou encore la fréquence de visite, d'une trajectoire typique du système dynamique considéré, dans une cellule r de la grille contenant E (cf. [10]).
- Cas 2 : E est l'ensemble de Julia d'un polynôme complexe P de degré ($d \geq 2$).

Brolin [3] montre que si on construit une suite (μ_n) de mesures de masse unité, telle que pour presque tout z_0 de \mathbb{C} :

μ_n place la masse $1/d^n$ en chacun des d^n antécédents, par P , de z_0

alors : la suite (μ_n) converge faiblement vers une limite μ , limite qui admet E comme support.

Dans les cas (1 et 2) on prendra, lors des applications numériques, $\mu(r) = |r|/N$ où $|r| = \text{card}(E \cap r)$.

Si dans la grille de taille ε , on a $T(\varepsilon)$ cellules non vides $r^{(k)}(\varepsilon)$, $k = 1, \dots, T(\varepsilon)$, on pose :

$$H(\varepsilon) = - \sum_{k=1}^{T(\varepsilon)} \mu(r^{(k)}(\varepsilon)) \cdot \ln(\mu(r^{(k)}(\varepsilon)))$$

alors, la dimension d'information $\dim_i = \dim_i(E)$ est définie par :

$$\dim_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (\text{lorsque la limite existe}). \tag{2}$$

Remarque. Des exemples de fractales, pour lesquelles les deux précédentes limites n'existent pas, sont proposés par Lausberg [10].

3. Notion de préconditionnement

Soit $D = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ un domaine incluant E . Subdivisons D en $(n \cdot m)$ cellules disjointes r_{ij} ($(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$) avec $(n \text{ et } m) \ll N$ (ex : $n = m = 500$, $N \sim 10^6$) de côtes ε_x et ε_y (Fig. 1).

On appelle préconditionnement (ou *preprocessing*) des N points de E selon le maillage $M = M(D, n, m)$, une opération qui consiste à répartir ces points dans D de telle sorte à accéder « rapidement » aux points de $(E \cap r)$ pour toute cellule r de M ; ce problème est appelé problème du “Range-Searching” en géométrie algorithmique [12]. Les cellules de M sont disjointes dans le sens que chaque point de E appartient, après le préconditionnement, à une et une seule de celles-ci. On signale que le coût de cette opération est en $O(N + n \cdot m)$ [1].

A la fin du préconditionnement, on connaît donc les nombres entiers $|r_{ij}|$ de points de $(E \cap r_{ij})$ pour $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$. Dans la suite, on va exploiter la connaissance de ces $(n \cdot m)$ entiers pour calculer la dimension fractale de E .

4. Préconditionnement et calcul de $(\dim_B$ et \dim_i)

4.1. Une discrétisation de la taille ε

Dans les deux définitions (1) et (2), le passage à la limite nécessite la discrétisation de la taille ε lors du calcul numérique de chaque dimension. L'essentiel de notre travail repose sur un preconditionnement des N points de E suivant une discrétisation particulière de la taille ε .

On détermine un domaine carré $D = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ incluant E . On choisit ensuite un nombre $((n = m) = n_1)$ de subdivisions de $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ tel que n_1 possède plusieurs diviseurs n_s ($s = 1, \dots, p$), en fait le maximum de grands diviseurs, auxquels on associe les tailles $\varepsilon_s = (X_2 - X_1)/n_s$.

La suite $(n_s)_{s=1, \dots, p}$ est prise décroissante, et telle que n_p soit «assez grand» pour que le plus grand rayon ε_p reste au voisinage de 0 (en accord avec les définitions de \dim_B et \dim_i).

4.2. Description de la méthode d'estimation des deux dimensions

On commence par preconditionner les N points de E suivant la grille la plus «fine», c.a.d. celle dont la taille des cellules est ε_1 . On obtient après cela $(n_1)^2$ entiers $|r_{ij}(\varepsilon_1)|$ ($i, j \in [1, n_1] \times [1, n_1]$), d'où l'on tire les quantités $T(\varepsilon_1)$ et $H(\varepsilon_1)$. La connaissance de ces entiers nous permet d'énoncer la

Proposition 4.1. *De par le choix de la suite $(n_s)_{s=1, \dots, p}$ de subdivisions du carré D , le calcul de la dimension fractale de E peut être effectué sans refaire l'opération de preconditionnement des N points suivant chaque grille de taille $\varepsilon_s = (X_2 - X_1)/n_s$ ($s = 2, \dots, p$) (appelées grilles «grossières»).*

Démonstration. Ceci provient du fait que, pour s fixé dans $[2, p]$, les $(n_s)^2$ entiers $|r_{kl}(\varepsilon_s)|$ ($k, l \in [1, n_s] \times [1, n_s]$), se déduisent, compte tenu de la numérotation utilisée pour les cellules (voir la Fig. 1), des entiers connus $|r_{ij}(\varepsilon_1)|$, ($i, j \in [1, n_1] \times [1, n_1]$), de la façon suivante :

$$|r_{kl}(\varepsilon_s)| = \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} |r_{ij}(\varepsilon_1)|, \tag{3}$$

où, en posant $\rho_s = n_1/n_s$: $i_1 = F_1^{(s)}(k)$, $i_2 = F_2^{(s)}(k)$, $j_1 = F_1^{(s)}(l)$, $j_2 = F_2^{(s)}(l)$ avec $F_1^{(s)}(t) = \rho_s \cdot (t - 1) + 1$ et $F_2^{(s)}(t) = \rho_s \cdot t$; et les deux valeurs $T(\varepsilon_s)$ et $H(\varepsilon_s)$ en découlent. □

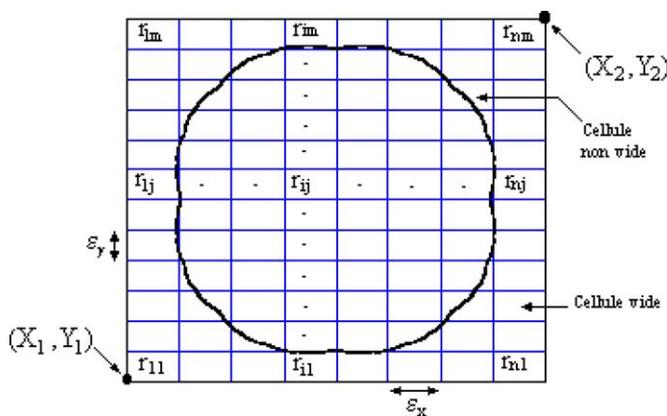


Fig. 1. Maillage du domaine D incluant E (ici $E = J(z^2 + 0, 1)$).

5. Obtention de \dim_B et \dim_i

Le moyen le plus couramment utilisé [14,6,10] consiste à ajuster, par une droite aux moindres carrés, chacun des deux nuages de points obtenus $(\ln(\varepsilon_s), -\ln(T(\varepsilon_s)))$, et $(\ln(\varepsilon_s), -H(\varepsilon_s))$, $s = 1, \dots, p$. Les pentes de ces deux droites nous donnent (respectivement) une estimation des dimensions \dim_B et \dim_i de l'ensemble E considéré.

6. Résultats numériques et graphiques

Dans les expériences numériques que nous présentons dans cette section et qui portent sur deux exemples, on a considéré la suite $(n_s)_{s=1, \dots, (p=16)}$ formée des diviseurs de 900 et supérieurs ou égaux à 20.

Exemple 1. E est l'attracteur de Hénon [9]. Celui-ci est engendré par l'application

$$f(x, y) = (1 - a \cdot x^2 + y, b \cdot x) \quad \text{avec } (a, b) = (1,4, 0,3).$$

En prenant $N = 25 \times 10^4$ points, on obtient que : $\dim_B = 1,229$, $\dim_i = 1,220$. Dans [10,8], les valeurs estimées de la dimension fractale de E sont comprises entre 1,20 et 1,29.

Les ($p = 16$) points de chacun des deux nuages $(\ln(\varepsilon), -\ln(T(\varepsilon)))$ et $(\ln(\varepsilon), -H(\varepsilon))$ obtenus par notre algorithme sont présentés en Fig. 2. L'ajustement utilisé concorde avec leur aspect respectif car ils approchent une droite avec une grande précision : les deux coefficients de détermination dépassent 99,9 %, et les sommes des résidus sont de l'ordre de 10^{-3} .

Exemple 2. $E_c =$ Ensemble de Julia J , noté $J(P)$, où $P(z) = z^2 + c$ (c fixé dans \mathbb{C}).

Si c est de « petit » module, E_c est homéomorphe à un cercle (cf. [2,3] ; sa dimension fractale est légèrement supérieure à l'unité. D'ailleurs, Ruelle [13] montre que la dimension de Hausdorff [6], notée d_H de E_c , dépend analytiquement de c . Plus précisément, il prouve que :

$$d_H = d_H(c) = 1 + |c|^2 / (4 \cdot \ln(2)) + O(|c|^2). \tag{4}$$

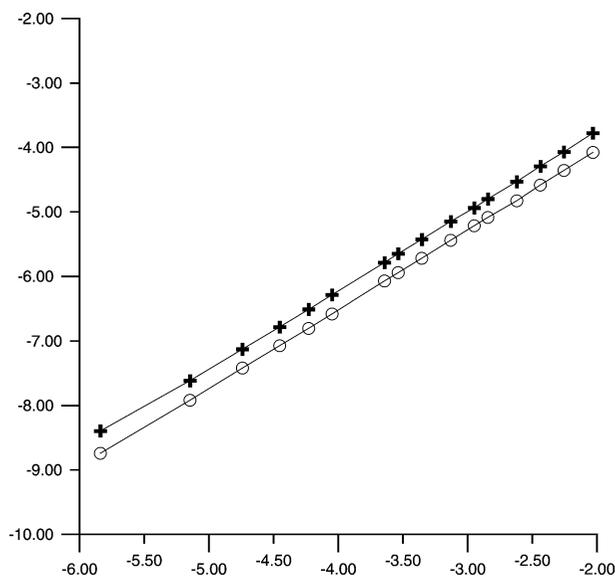


Fig. 2. Nuages $(\ln(\varepsilon), -\ln(T(\varepsilon)))$ – symbole $\circ \circ \circ$, et $(\ln(\varepsilon), -H(\varepsilon))$ – symbole $+++$, obtenus dans le cas de l'attracteur de Hénon.

Pour notre part, on a choisi de tester notre méthode avec $c = 0,1$ et $N = 2^{17} = 131072$; l'ensemble $J(P)$ est dessiné en même temps que la grille de la Fig. 1. Les valeurs trouvées pour les deux dimensions sont $\dim_B = 1,014$ et $\dim_i = 1,004$; et la formule (4) de Ruelle donne, elle, $d_H = 1,003$.

7. Conclusion

Notre proposition de la suite de subdivisions $(n_s)_{s=1,\dots,p}$ du domaine carré $D = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ incluant l'ensemble E , s'avère efficace car la méthode des boîtes qui lui est associée est :

- de complexité moindre : en effet, le préconditionnement, et par conséquent le test des N points de E , se fait une et une seule fois, et cela suivant la grille la plus fine ;
- Numériquement performante : les valeurs estimées des deux dimensions (de boîte et d'information) sont proches de celles trouvées par d'autres auteurs [6,8,10] à l'aide de différents algorithmes.

Références

- [1] N. Akroune, Quelques méthodes d'étude locale d'ensembles de Julia et applications, Thèse de doctorat de troisième cycle, Université Scientifique Technologique et Médicale de Grenoble (U.S.T.M.G.), 1987.
- [2] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 11 (1) (1984) 85–141.
- [3] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Math.* 6 (1965) 103–144.
- [4] P. Collet, J.P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [5] J.P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, part 1, *Rev. Modern Phys.* 57 (3) (1985) 617–655.
- [6] J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke, The dimension of chaotic attractors, *Physica D* 7 (1983) 153–180.
- [7] J.F. Gouyet, *Physique et structures fractales*, Masson, Paris, 1992.
- [8] P. Grassberger, I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D* 9 (1983) 189–208.
- [9] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Commun. Math. Phys.* 50 (1976) 69–77.
- [10] C. Lausberg, Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble (I.N.P.G.), 1987.
- [11] B. Mandelbrot, *Les objets fractals: formes, hasard et dimension*, deuxième éd., Flammarion, Paris, 1984.
- [12] F.P. Preparata, M.I. Shamos, *Computational Geometry – An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [13] D. Ruelle, Repellers for real analytic maps, *Ergodic Theory Dynamical Systems* 2 (1982) 99–107.
- [14] C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*, Springer-Verlag, Paris, 1993.