Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 879–884
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie analytique

# Classes de Chern des ensembles analytiques

Vincent Cavalier [a], Daniel Lehmann [a], Marcio Soares [b]

[a] *CNRS UMR 5030, laboratoire GTA, Université de Montpellier II, case 051, 34095 Montpellier cedex 5, France*
[b] *Departamento de Matematica, Universitade federal de Minas Gerais, 31270-901 Belo Horizonte, Brésil*

Reçu le 14 octobre 2003 ; accepté après révision le 10 mars 2004

Disponible sur Internet le 17 avril 2004

Note présenté par Étienne Ghys

**Résumé**

Soit $V$ un sous-ensemble analytique complexe compact d'une variété holomorphe $M$. Nous allons définir des classes en homologie, qui coïncident, lorsque $V$ est sans singularité, avec les duales de Poincaré $c^*(N_V) \frown [V]$ et $c^*(TV) \frown [V]$ des classes de Chern des fibrés normal $N_V$ et tangent $TV$. Cependant ces définitions dépenderont en général de la donnée d'une désingularisation $\varphi : V' \to V$ de $V$, excepté dans quelques cas particuliers tels ceux des courbes complexes ou des ensembles qui sont localement intersection complète (LCI). Ces classes permettent de généraliser des théories déjà connues pour les LCI, telle celle des indices de feuilletages relatifs à un sous-ensemble analytique invariant, ou celle des nombres et classes de Milnor. ***Pour citer cet article : V. Cavalier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


**Abstract**

**Chern classes for analytic sets.** Let $V$ be a compact complex analytical subset of a holomorphic manifold $M$. We shall define classes in homology, which coincide, when $V$ is non-singular, with the Poincaré duals $c^*(N_V) \frown [V]$ and $c^*(TV) \frown [V]$ of the Chern classes of the normal bundle $N_V$ and of the tangent bundle $TV$. However, these definitions depend in general on the data on a desingularization $\varphi : V' \to V$ of $V$, except in some particular cases, as complex curves or sets which are locally complete intersection (LCI). These classes make possible to generalize some theories already known for LCI, such as the various indices of foliations relatively to invariant subsets, or the Minor numbers and classes. ***To cite this article: V. Cavalier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


## Abridged English version

Let $V$ be a compact complex analytical subset of pure complex dimension $n$ in a holomorphic manifold $M$. Denote by $V_0$ the non-singular part of $V$, $\mathcal{O}_M$ the sheaf of germs of holomorphic functions on $M$, $\mathcal{I}_V$ the sheaf of germs of holomorphic functions on $M$ vanishing on $V$, $\mathcal{O}_V$ the restriction to $V$ of $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_V$ (i.e., the sheaf of

*Adresses e-mail :* cavalier@darboux.math.univ-montp2.fr (V. Cavalier), lehmann@darboux.math.univ-montp2.fr (D. Lehmann), msoares@mat.ufmg.br (M. Soares).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2004.03.009

functions on $V$ which are restrictions to $V$ of holomorphic functions on $M$), and $\mathcal{N}_V^*$ the conormal sheaf of $V$, i.e., the restriction to $V$ of $\mathcal{I}_V/\mathcal{I}_V^2$.

Let $\varphi : V' \to V$ be a desingularization of $V$ ($V'$ denotes some compact holomorphic nonsingular manifold), $\varphi$ some proper $\mathbb{C}$-analytical map inducing a biholomorphism $\varphi^{-1}(V_0) \to V_0$ (such a desingularization always exists, after Hironaka [8] in the algebraic case and Bierstone and Milman [3] in the analytic case. Denote by $\mathcal{O}_{V'}$ (resp. $\mathcal{A}_{V'}$) the sheaf of germs of holomorphic (resp. $\mathbb{R}$-analytical $\mathbb{C}$-valued) functions on $V'$.

Since $V'$ is compact and nonsingular, the $\mathcal{A}_{V'}$-coherent sheaf $\mathcal{A}_{V'} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V)} \varphi^{-1}(\mathcal{N}_V^*)$ always admits after [1] (Proposition 2.6) a locally free resolution of length $r$ at most $2n$

$$0 \to \mathcal{A}_{V'}(E_r^*) \xrightarrow{\alpha_r^*} \mathcal{A}_{V'}(E_{r-1}^*) \to \cdots \to \mathcal{A}_{V'}(E_1^*) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathcal{A}_{V'}(E_0^*) \xrightarrow{\alpha_0^*} \mathcal{A}_{V'} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V)} \varphi^{-1}(\mathcal{N}_V^*) \to 0, \qquad (\mathcal{R})$$

where $E_j^* \to V'$ denotes some $\mathbb{R}$-analytical complex vector bundle over $V'$, and $\mathcal{A}_{V'}(E_j^*)$ the sheaf of germs of its $\mathbb{R}$-analytical sections. Moreover, after [1] (Propositions 2.7, 2.8), the element $N_{V'}^* = \sum_{i=0}^r (-1)^i E_i^* \in K^0(V')$ does not depend on the choice of the resolution $\mathcal{R}$. Denoting by $E_i$ the dual bundle of $E_i^*$, we set: $N_{V'} = \sum_{i=0}^r (-1)^i E_i$.

**Remark 1.** It may happen that $\mathcal{O}_{V'} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V)} \varphi^{-1}(\mathcal{N}_V^*)$ itself has a $\mathcal{O}_{V'}$-locally free resolution of finite length: in this case, it is not necessary to tensor by $\mathcal{A}_{V'}$ since $\mathcal{A}_{V'}$ is $\mathcal{O}_{V'}$-flat.

**Definition 0.1.** We call normal Chern $\varphi$-classes of $V$ into $M$ the image in $H_{2(n-*)}(V;\mathbb{Z})$ of the cohomological Chern classes $c^*(N_{V'})$ of $N_{V'}$ by the map which is the composition of the Poincaré duality $(\cdot) \frown [V']$: $H^{2*}(V';\mathbb{Z}) \to H_{2(n-*)}(V';\mathbb{Z})$ in $V'$ with the map $\varphi_* : H_{2(n-*)}(V';\mathbb{Z}) \to H_{2(n-*)}(V;\mathbb{Z})$ induced by $\varphi$ in homology: $c_{n-*}(N_V, \varphi) := \varphi_*(c^{(*)}(N_{V'}) \frown [V'])$. We call similarly tangential Chern $\varphi$-classes of $V$ into $M$ the homology classes $c_{n-*}^{\mathrm{Vir}}(V, \varphi) := \varphi_*[c^{(*)}(\varphi^{-1}([TM|_V]) - [N_{V'}]) \frown [V']]$.

**Definition 0.2.** We define in a similar way $c_{n-I}(N_V, \varphi) := \varphi_*(c^{(I)}(N_{V'}) \frown [V'])$, and $c_{n-I}^{\mathrm{Vir}}(V, \varphi) := \varphi_*[c^{(I)}(\varphi^{-1}([TM|_V]) - [N_{V'}]) \frown [V']]$, where $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ denotes a multi-index of integers $i_j \geqslant 0$, $c^{(I)}(\xi) = [(c^{(1)})^{i_1} \cdot (c^{(2)})^{i_2} \cdots (c^{(r)})^{i_r}](\xi)$ in $H^{2|I|}(V)$ (where $|I| = i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r$), and $c_{n-I}(\xi) = c^{(I)}(\xi) \frown [V]$ in $H_{2(n-|I|)}(V)$.

By abuse of notations, we still write $c_*(N_V)$ and $c_*^{\mathrm{Vir}}(V)$ for sets $V$, if there is no ambigüity on $\varphi$.

In case of compact complex curves, or of LCI's, there exists a well defined element $[N_V] \in K^0(V)$ such that $N_{V'} = \varphi^{-1}[N_V]$, and such that the Chern classes defined above in homology are the Poincaré-duals of the cohomological Chern classes of $N_V$ and $T^{\mathrm{vir}}V := [TM|_V - N_V]$. These classes are thus independant on $\varphi$, and already defined in cohomology. For curves, there exists only one desingularization $\varphi$, the normalization, and $\varphi^* : K^0(V) \to K^0(V')$ is a monomorphism, thus $[N_V] := (\varphi^*)^{-1}(N_{V'})$. (For LCI's, the bundle $N_{V_0}$, normal to the regular part $V_0$ of $V$ in $M$, has a natural extension $N_V$ to all of $V$, hence its stable class $[N_V]$. In case of a curve which is also LCI, both definitions of $[N_V]$ coincide.)

*Applications* (We refer to [7] for details): It turns out that we can extend to any analytical set the both following theories, already known in full generality for LCI's:

– on the one hand the various residue theorems relative to the situation of a holomorphic foliation on $M$ with respect to which $V$ is invariant: indices *CS* of type Camacho–Sad, indices $BB_V$ of type Baum–Bott relative to $V$ (in particular indices *GSV* of type Gomez-Mont Seade Verjovski), and variations of type Kanedani–Suwa (cf. [9–11] for LCI), (by the way, we are giving a new interpretation of GSV in $K$-theory, generalizing the one given in [6]),
– and on the other hand the Milnor numbers and classes of the singular part of $V$ (cf. [4] for LCI).

## 1. Classes de Chern virtuelles des ensembles analytiques

Soit $V$ ensemble analytique complexe compact, de dimension complexe pure $n$, dans une variété holomorphe $M$. On note $V_0$ la partie régulière de $V$, $\mathcal{O}_M$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $M$, $\mathcal{I}_V$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $M$ qui s'annulent sur $V$, $\mathcal{O}_V$ la restriction à $V$ de $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_V$ (i.e. le faisceau des germes de fonctions sur $V$ qui sont restrictions à $V$ de fonctions holomorphes sur $M$), et $\mathcal{N}_V^*$ le faisceau conormal de $V$ (i.e. la restriction à $V$ de $\mathcal{I}_V/\mathcal{I}_V^2$).

Soit $\varphi : V' \to V$ une désingularisation de $V$ ($V'$ est une variété holomorphe compacte sans singularité), et $\varphi$ une application $\mathbb{C}$-analytique propre induisant un biholomorphisme $\varphi^{-1}(V_0) \to V_0$ (une telle désingularisation existe toujours, d'après Hironaka [8] dans le cas algébrique et Bierstone et Milman [3] dans le cas analytique). Notons $\mathcal{O}_{V'}$ (resp. $\mathcal{A}_{V'}$) le faisceau des germes de fonctions holomorphes (resp. $\mathbb{R}$-analytiques et à valeurs dans $\mathbb{C}$) sur $V'$. De [1] résulte la

**Proposition 1.1.** *Le faisceau $\mathcal{A}_{V'}$-cohérent $\mathcal{A}_{V'} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V)} \varphi^{-1}(\mathcal{N}_V^*)$ admet toujours une résolution localement libre de longueur finie $r \leqslant 2n$*

$$0 \to \mathcal{A}_{V'}(E_r^*) \xrightarrow{\alpha_r^*} \mathcal{A}_{V'}(E_{r-1}^*) \to \cdots \to \mathcal{A}_{V'}(E_1^*) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathcal{A}_{V'}(E_0^*) \xrightarrow{\alpha_0^*} \mathcal{A}_{V'} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V)} \varphi^{-1}(\mathcal{N}_V^*) \to 0, \qquad (\mathcal{R})$$

*où $E_j^* \to V'$ désigne un fibré vectoriel complexe $\mathbb{R}$-analytique de base $V'$, et $\mathcal{A}_{V'}(E_j^*)$ le faisceau des germes de ses sections $\mathbb{R}$-analytiques. En outre, l'élément $N_{V'}^* = \sum_{i=0}^r (-1)^i E_i^*$ dans $K^0(V')$ ne dépend pas du choix de la résolution $\mathcal{R}$.*

Notant $E_i$ le fibré dual de $E_i^*$, posons : $N_{V'} = \sum_{i=0}^r (-1)^i E_i$.

**Remarque 1.** Il se peut que $\mathcal{O}_{V'} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V)} \varphi^{-1}(\mathcal{N}_V^*)$ admette lui-même une résolution $\mathcal{O}_{V'}$-localement libre de longueur finie : dans ce cas, il n'est pas nécessaire de tensoriser par $\mathcal{A}_{V'}$ pour définir $N_{V'}^*$, puisque $\mathcal{A}_{V'}$ est $\mathcal{O}_{V'}$-plat.

**Définition 1.2.** Nous appellerons $\varphi$-classes de Chern normales de $V$ dans $M$ et nous noterons $c_{n-*}(N_V, \varphi)$ l'image dans $H_{2(n-*)}(V; \mathbb{Z})$ des classes de Chern $c^*(N_{V'})$ de $N_{V'}$ en cohomologie, par l'application obtenue en composant la dualité de Poincaré $(\cdot) \frown [V'] : H^{2*}(V'; \mathbb{Z}) \to H_{2(n-*)}(V'; \mathbb{Z})$ dans $V'$ avec l'application $\varphi_* : H_{2(n-*)}(V'; \mathbb{Z}) \to H_{2(n-*)}(V; \mathbb{Z})$ induite par $\varphi$ en homologie :

$$c_{n-*}(N_V, \varphi) := \varphi_*\big(c^{(*)}(N_{V'}) \frown [V']\big).$$

**Définition 1.3.** De même, nous appellerons $\varphi$-classes de Chern tangentielles de $V$ dans $M$, et nous noterons $c_{n-*}^{\mathrm{Vir}}(V, \varphi)$ les classes d'homologie $c_{n-*}^{\mathrm{Vir}}(V, \varphi) = \varphi_*[c^{(*)}(\varphi^{-1}([TM|_V]) - [N_{V'}]) \frown [V']]$. De façon analogue, on définit

$$c_{n-I}(N_V, \varphi) := \varphi_*\big(c^{(I)}(N_{V'}) \frown [V']\big) \quad \text{et} \quad c_{n-I}^{\mathrm{Vir}}(V, \varphi) := \varphi_*\big[c^{(I)}\big(\varphi^{-1}\big([TM|_V]\big) - [N_{V'}]\big) \frown [V']\big],$$

où $c^{(I)}(\xi) = [(c^{(1)})^{i_1} \cdot (c^{(2)})^{i_2} \cdots (c^{(r)})^{i_r}](\xi)$ dans $H^{2|I|}(V)$ (avec : $|I| = i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r$), $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ désignant un multi-indice formé d'entiers $i_j \geqslant 0$, et $c_{n-I}(\xi) = c^{(I)}(\xi) \frown [V]$ dans $H_{2(n-|I|)}(V)$.

Nous écrirons $c_*(N_V)$ au lieu de $c_*(N_V, \varphi)$ lorsque ces classes ne dépendent pas de $\varphi$, auquel cas, les classes $c_*^{\mathrm{Vir}}(V, \varphi)$ n'en dépendent pas non plus, puisqu'égales à $\sum_i (c^i(M)|_V) \frown c_{(n-I_{j,i})}(N_V)$ : on les notera $c_*^{\mathrm{Vir}}(V)$. Par abus de notations, nous écrirons encore $c_*(N_V)$ et $c_*^{\mathrm{Vir}}(V)$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur $\varphi$.

## 2. Cas particuliers : Courbes complexes et intersections complètes locales

Dans ces deux cas, il existe un élément bien défini $[N_V] \in K^0(V)$ tel que, pour toute désingularisation $\varphi : V' \to V$ de $V$, $N_{V'} = \varphi^{-1}[N_V]$, et tel que les classes de Chern définies ci-dessus en homologie soient les duales de Poincaré dans $V$ des classes de Chern en cohomologie de $N_V$ et $T^{\mathrm{vir}}V := [TM|_V - N_V]$. Ces classes sont donc indépendantes de $\varphi$, et déjà définies en cohomologie. (Pour les courbes, il n'existe qu'une seule désingularisation à isomorphisme près, la normalisation, et $\varphi^* : K^0(V) \to K^0(V')$ est un monomorphisme. Pour les LCI, le fibré normal $N^*_{V_0}$ à la partie régulière $V_0$ de $V$ admet un prolongement naturel à tout $V$. On en déduit $[N_V]$ dans chacun de ces deux cas. Si une courbe analytique complexe compacte est en même temps LCI, les deux définitions de $[N_V]$ données ci-dessus coïncident.)

## 3. Exemples

### 3.1. Quintique

Notant $(X, Y, Z, T)$ (resp. $(u, v)$) les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_3$ (resp. $\mathbb{P}_1$), la quintique $\Gamma$ dans $M = \mathbb{P}_3$, égale à l'image du morphisme $\varphi$ de $\mathbb{P}_1$ dans $\mathbb{P}_3$ défini par

$$X = u^3v^2, \quad Y = u^4v, \quad Z = u^5, \quad T = v^5$$

est une courbe algébrique complexe compacte. Elle admet l'origine $m_T = [0, 0, 0, 1]$ comme seul point singulier, et n'est pas intersection complète au voisinage de ce point. Notant $L_0$ le fibré tautologique de $\mathbb{P}_1$, $L$ celui de $\mathbb{P}_3$, $\check{L}_0$ et $\check{L}$ leur fibré dual, le fait que le degré de $\Gamma$ soit 5 se traduit par la relation $\varphi^{-1}L = L_0^5$. La courbe $\Gamma$ est définie par les trois équations $F = Y^2 - XZ$, $G = X^3 - YZT$, et $H = Z^2T - X^2Y$ de degrés respectifs 2,3 et 3, et qui engendrent toutes les autres équations satisfaites par $\Gamma$. Ces équations sont liées par les deux relations $X^2F + ZG + YH \equiv 0$ et $ZTF + YG + XH \equiv 0$, toutes deux de degré 4, et qui engendrent toutes les autres relations satisfaites par $F$, $G$ et $H$. On en déduit un début de résolution :

$$2\mathcal{O}_\Gamma\big(L^4|_\Gamma\big) \xrightarrow{\begin{pmatrix} X^2 & ZT \\ Z & Y \\ Y & X \end{pmatrix}} \mathcal{O}_\Gamma\big(\big(L^2 \oplus 2L^3\big)|_\Gamma\big) \xrightarrow{(F\ G\ H)} \mathcal{N}^*_\Gamma \to 0.$$

Après image réciproque par $\varphi$, on obtient une résolution $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$-localement libre de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{N}^*_\Gamma$ :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}\big(L_0^{21}\big) \xrightarrow{\alpha_2^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}\big(2L_0^{20}\big) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}\big(L_0^{10} \oplus 2L_0^{15}\big) \xrightarrow{\alpha_0^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{N}^*_\Gamma \to 0.$$

On en déduit : $\varphi^{-1}([N^*_\Gamma]) = [L_0^{10} + 2L_0^{15} - 2L_0^{20} + L_0^{21}]$. Notant $\varphi\zeta$ l'image réciproque d'un élément $\zeta \in \mathrm{Im}[(\varphi)^* : K^0(\Gamma) \to K^0(\mathbb{P}_1)]$ par le monomorphisme $(\varphi)^*$, on obtient :

$$[N_\Gamma] = \big[\check{L}^2 + 2\check{L}^3 - 2\check{L}^4\big]\big|_\Gamma + \varphi\check{L}_0^{21}, \quad \text{et} \quad T^{\mathrm{vir}}\Gamma = \big[\big(4\check{L} + 2\check{L}^4\big) - \big(\check{L}^2 + 2\check{L}^3\big)\big]\big|_\Gamma - \varphi\check{L}_0^{21}$$

et les classes de Chern correspondantes en homologie $c_0(N_\Gamma) = 21$ et $c_0^{\mathrm{vir}}(\Gamma) = 1$ dans $H_0(\Gamma; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (rappelons que $[T\mathbb{P}_3] = 4[\check{L}]$ dans $K^0(\mathbb{P}_3)$).

**Remarque 2.** En fait, $\varphi$ étant ici un homéomorphisme de $\mathbb{P}_1$ sur $\Gamma$, $\varphi\check{L}_0^{21}$ est défini en tant que fibré sur $\Gamma$, et pas seulement comme élément de $K^0(\Gamma)$. Mais un calcul absolument analogue aurait pu être fait pour la quintique $X = u^2(u - v)v^2$, $Y = u^3(u - v)v$, $Z = u^4(u - v)$, $T = v^5$, pour laquelle la paramétrisation n'est plus un homéomorphisme.

*3.2. Droites invariantes par un champ de vecteurs homogène*

Soit $w$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{C}^3$, dont les composantes $A$, $B$, $C$ sont des polynômes homogènes de même degré $d \geqslant 1$. On supposera le feuilletage $\mathcal{F}$ engendré par $w$ dans $M = \mathbb{P}_3$ générique au sens suivant : il est « non dicritique » (i.e. il laisse invariant le plan à l'infini $\mathbb{P}_2$), le feuilletage induit à l'infini n'a que des singularités simples isolées (en nombre $d^2+d+1$ d'après [2]), la réunion $V = \bigcup_{1\leqslant a\leqslant d^2+d+1} \Delta_a$ des $d^2+d+1$ droites projectives $\Delta_a$ invariantes par $\mathcal{F}$ a un idéal homogène engendré par les trois équations $F=0$, $G=0$, $H=0$ (où $F = AY - BX$, $G = BZ - CY$, $H = CX - AZ$), et les deux relations $CF + AG + BH \equiv 0$, $ZF + XG + YH \equiv 0$ engendrent toutes les autres. Un calcul analogue à celui esquissé ci-dessus dans le cas de la quintique permet de montrer que si l'on note $\check{L}_0$ le fibré en hyperplans dual du fibré tautologique $L_0$ sur $\mathbb{P}_1$, et $\iota_a : \mathbb{P}_1 \to \Delta_a$ une paramétrisation de $\Delta_a$, on obtient :

$$(\iota_a)^{-1}\big([N_V]\big) = 3\check{L}_0^{d+1} - \check{L}_0^{d+2} \quad \text{et} \quad (\iota_a)^{-1}\big(T\mathbb{P}_1 - [N_V]\big) = 4\check{L}_0 - 3\check{L}_0^{d+1} + \check{L}_0^{d+2}.$$

*3.3. Cônes projectifs sur un ensemble algébrique*

Soit $V$ un sous-ensemble algébrique compact de $\mathbb{P}_m$ et $CV$ le cône projectif dans $\mathbb{P}_{m+1}$, ayant pour base l'ensemble $V$ ($\mathbb{P}_m$ étant identifié à l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}_{m+1}$, et le sommet du cône étant l'origine dans $\mathbb{C}^{m+1} \subset \mathbb{P}_{m+1}$).

**Proposition 3.1.** *Si $V$ admet une désingularisation $\varphi : \mathbb{P}_n \to V$ par un espace projectif $\mathbb{P}_n$, telle que $\varphi^* : K^0(V) \to K^0(\mathbb{P}_n)$ soit un isomorphisme, l'application $C\varphi : \mathbb{P}_{n+1} \to CV$ obtenue à partir de $\varphi$ par application du foncteur cône est alors une désingularisation de $CV$, et $(C\varphi)^* : K^0(CV) \to K^0(\mathbb{P}_{n+1})$ est encore un isomorphisme.*

Ceci permet de définir $N_{CV}$, et s'applique par exemple à toute courbe projective $\Gamma$ de genre 0, et par récurrence, à tout cône projectif itéré $CC\ldots C\Gamma$ sur une telle courbe. Par exemple, pour le cône $C\Gamma$ dans $\mathbb{P}_4$ sur la quintique $\Gamma$ de l'exemple $a$, notons $(X, Y, Z, T, R)$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_4$, et $(u, v, w)$ celles dans $\mathbb{P}_2$ : le morphisme $C\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ est défini par

$$X = u^3v^2, \quad Y = u^4v, \quad Z = u^5, \quad T = v^5, \quad R = w^5,$$

et est un homéomorphisme de $\mathbb{P}_2$ sur $C\Gamma$. On obtient alors :

$$[N_{C\Gamma}] = \big[\check{L}^2 + 2\check{L}^3 - 2\check{L}^4\big]\big|_{C\Gamma} + (C\varphi)\check{L}_0^{21}, \quad \text{et} \quad T^{\mathrm{vir}}C\Gamma_i = \big[\big(5\check{L} + 2\check{L}^4\big) - \big(\check{L}^2 + 2\check{L}^3\big)\big]\big|_{\Gamma} - \varphi\check{L}_0^{21},$$

où $L_0$ désigne maintenant le fibré tautologique de $\mathbb{P}_2$, $L$ celui de $\mathbb{P}_4$, et $(C\varphi)L_0$ l'image réciproque de $L_0$ par l'homéomorphisme $(C\varphi)^{-1} : C\Gamma \to \mathbb{P}_2$. On en déduit : $c_0(N_{C\Gamma}, C\varphi) = 125$ et $c_{2-I}(N_{C\Gamma}, C\varphi) = 441$ dans $H_0(C\Gamma; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ pour $c^I = (c^1)^2$, tandis que $c_1(N_{C\Gamma}, C\varphi) = 21\ \varphi_*[H]$ où $[H]$ désigne la classe d'homologie d'une droite projective complexe arbitraire de $\mathbb{P}_2$, et $\varphi_*[H]$ son image par $\varphi_*$ (c'est-à-dire à la classe d'homologie dans $H_2(C\Gamma; \mathbb{Z})$ de l'une des droites projectives complexes de $\mathbb{P}_3$ que l'on peut obtenir comme génératrice du cône). De même, $c_0^{\mathrm{vir}}(C\Gamma, C\varphi) = 46$ et $c_{2-I}^{\mathrm{vir}}(C\Gamma, C\varphi) = 1$ dans $H_0(C\Gamma; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ pour $c^I = (c^1)^2$, tandis que $c_1^{\mathrm{vir}}(C\Gamma, C\varphi) = -\varphi_*[H]$.

## 4. Applications (voir détails et exemples dans [7])

(a) Cas d'un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de dimension complexe $r$ sur $M$ laissant $V$ invariant et vérifiant les hypothèses de Baum–Bott [2] : notant $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}|_V \in K^0(V)$ la restriction à $V$ du fibé virtuel normal à $\mathcal{F}$, et posant $\Sigma = \operatorname{Sing} V \cup (V \cap \operatorname{Sing} \mathcal{F})$ on obtient :

**Théorème 4.1.** *Pour $|I| > n - r$, les classes $c_{n-I}(N_V)$, $c_{n-I}(\mathcal{V}_{\mathcal{F}}|_V - N_V)$ et $c_{n-I}(\mathcal{V}_{\mathcal{F}}|_V)$ se localisent près de $\Sigma$, c'est-à-dire admettent des relèvements naturels par l'application $H_{2(n-|I|)}(\Sigma, \mathbb{C}) \to H_{2(n-|I|)}(V, \mathbb{C})$.*

Ces relèvements généralisent les indices de type Camacho–Sad, Baum–Bott relatifs, et Variations de Kanedani–Suwa, deja connus pour les LCI (cf. [9–11]). Au passage une interpétation des indices de type GomezMont–Seade–Verjovski (cas particulier de Baum–Bott relatif) en $K$-théorie est donnée, qui généralise celle donnée dans [6].

(b) *Nombres et classes de Milnor* : Notons $\Sigma'$ la partie singulière de $V$ et $c_*^{\mathrm{SM}}(V)$ les classes de Schwartz–MacPherson (cf. [5]) :

**Théorème 4.2.** *Les différences* $(-\mathrm{i})^n[c_*^{\mathrm{vir}}(V) - c_*^{\mathrm{SM}}(V)]$ *se localisent près de* $\Sigma'$*, c'est-à-dire admettent un relèvement naturel par l'application* $H_{2*}(\Sigma') \to H_{2*}(V)$.

Ces relèvements généralisent les classes de Milnor $\mu_*(V)$ (nombres de Milnor si $* = 0$), deja connues pour les LCI (cf. [4]).

## Références


[1] M.F. Atiyah, F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds, Topology 1 (1961) 25–45.

[2] P. Baum, R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geom. 7 (1972) 279–342.

[3] E. Bierstone, P. Milman, Resolution of singularities, in: Several Complex Variables, Berkeley CA, 1995–1996, in: Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge University Press, 1999, pp. 43–78.

[4] J.-P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade, T. Suwa, Milnor classes of local complete intersections, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (4) (2001) 1351–1371.

[5] J.-P. Brasselet, M.-H. Schwartz, Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, in : Caractéristique d'Euler–Poincaré, in : Astérisque, vol. 82–83, Société Mathématique de France, 1981, pp. 93–147.

[6] V. Cavalier, D. Lehmann, Localisation des résidus de Baum–Bott, courbes généralisées, et $K$-théorie, Comment. Math. Helv. 76 (2001) 665–683.

[7] V. Cavalier, D. Lehmann, M. Soares, Classes de Chern des ensembles analytiques, et applications, Prépublication, Département des Sciences mathématiques, Université de Montpellier II, 2003.

[8] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, Ann. of Math. 79 (1964) 109–326.

[9] D. Lehmann, T. Suwa, Residue of holomorphic vector fields relative to singular invariant subvarieties, J. Differential Geom. 42 (1) (1995) 165–192.

[10] D. Lehmann, M. Soares, T. Suwa, On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety, Bol. Soc. Brasil Mat. 26 (1995) 183–199.

[11] D. Lehmann, T. Suwa, Generalization of variations and Baum–Bott residues for holomorphic foliations on singular varieties, Int. J. Math. 10 (3) (1999) 367–384.