Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 921–924
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Contrôle optimal

# Contrôle optimal pour les problèmes de contrôlabilité des systèmes distribués à données manquantes

René Dorville, Ousseynou Nakoulima, Abdennebi Omrane

*Université Antilles-Guyane, DMI, Campus de Fouillole, 97159 Pointe à Pitre cedex, Guadeloupe*

Reçu le 24 octobre 2003 ; accepté après révision le 6 avril 2004

Disponible sur Internet le 7 mai 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

**Résumé**

Dans cette Note, on traite de la contrôlabilité à zéro pour le problème de chaleur à donnée *initiale* manquante, avec un terme source $v \in L^2$. On cherche ensuite le meilleur des contrôles $v$ dans le sous ensemble convexe fermé des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ de $L^2$ par le moyen de la notion de contrôle à moindres regrets introduite par Lions. On obtient un système d'optimalité singulier sans hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$. ***Pour citer cet article : R. Dorville et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


**Abstract**

**Optimal control for the controllability of distributed systems of incomplete data.** In this Note, we are concerned with the null-controllability of the heat problem of incomplete *initial* data with a source term $v \in L^2$. Then, we look for the best of controls $v$ in the closed convex set of admissible controls $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ of $L^2$. By the mean of the notion of low-regret controls of Lions, we obtain a singular optimality system without any supplementary hypothesis on $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$. ***To cite this article: R. Dorville et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## 1. Contrôlabilité à zéro pour un problème à données manquantes

Soit $\Omega$ un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$ ou 3, de frontière régulière $\partial\Omega$. On note $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$, et on considère le problème de la chaleur suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v + \theta \cdot 1_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = g & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

*Adresses e-mail :* rene.dor@wanadoo.fr (R. Dorville), onakouli@univ-ag.fr (O. Nakoulima), aomrane@univ-ag.fr (A. Omrane).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2004.04.002

où $v \in L^2(Q)$, $\omega \Subset \Omega$ ouvert non vide, $g \in G$, $G$ sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$, et $1_\omega$ l'indicatrice sur $\omega$. Pour tout $(v, g, \theta)$ fixé, le problème (1) admet une solution unique $y = y(v, g, \theta)$. Le problème de contrôlabilité à zéro pour (1) consiste à chercher $\theta \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que si $y$ est solution de (1) alors

$$y(T) = 0. \tag{2}$$

Ce problème est bien connu et a été étudié par de nombreux auteurs (voir par exemple Puel [5] et les références dedans). De plus, il n'y a pas unicité de la solution.

Supposons alors avoir selectionné pour un critère donné une et une seule solution du problème (1), (2). Plus précisément, nous verrons plus loin qu'il existe un critère défini par une fonction poids $\rho$ telle que pour tout $(v, g)$ donné, il existe un unique couple $(\theta, y_\theta)$ tel que

$$y_\theta = y(v, g; \theta) \quad \text{et} \quad y_\theta(T) = 0.$$

On pose $\theta = \theta(v, g)$ et $y_\theta = y_\theta(v, g)$. On peut remarquer que $y_\theta(0, 0) = 0$ *ssi* $\theta(0, 0) = 0$. Cela étant, pour $(v, g) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$, on considère la fonction coût

$$J(v, g) = \left\| y_\theta(v, g) - z_d \right\|^2_{L^2(Q)} + N \|v\|^2_{L^2(Q)}, \tag{3}$$

où $z_d \in L^2(Q)$ et $N \in \mathbb{R}^*_+$ sont donnés. On met alors en évidence deux problèmes qui nous semblent nouveaux.

– Si $G = \{0\}$, alors $y_\theta(v, 0)$ est connu. Le système (1) est alors à informations complètes et un problème de contrôle est :

$$\inf_v J(v, 0), \tag{4}$$

où dans (3), $y_\theta(v, 0)(T) = 0$.

– Si $G \neq \{0\}$, (4) n'a pas de sens. Un outil d'analyse de (3) est alors par exemple la notion de contrôle à moindres regrets de Lions [3].

Dans les deux cas considérés, les problèmes posés ne sont pas standards. On trouvera leur étude détaillée dans [1]. L'objet de cette Note est de présenter les résultats obtenus dans le cas $G \neq \{0\}$.

On commence par rappeler une méthode variationnelle pour l'existence et l'unicité d'une sélection de solution pour le problème (1), (2). La méthode repose sur le résultat suivant :

**Lemme 1.1.** *Soit $L = \partial/\partial t - \Delta$ et $L^* = -\partial/\partial t - \Delta$ son adjoint. Alors il existe une fonction « poids » $\rho$ de classe $C^2$ et positive sur $Q$ telle que $1/\rho$ soit bornée dans $Q$ et il existe une constante $C = C(\Omega, T, \omega, \rho) > 0$ telle que*

$$\int_Q \frac{1}{\rho^2} |q|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \left|q(0)\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \left[ \int_Q \frac{1}{\rho^2} |L^* q|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\omega \frac{1}{\rho^2} |q|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right] \tag{5}$$

*pour tout $q \in \mathcal{V} = \{\varphi \in C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$ tel que $\varphi_{|\Sigma} = 0\}$.*

Ce lemme découle d'une inégalité de Carleman pour laquelle on pourra se référer à [2] et [5].

Le second membre de (5) amène à munir $\mathcal{V}$ du produit scalaire :

$$a(p, q) = \int_Q \frac{1}{\rho^2} L^* p L^* q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\omega \frac{1}{\rho^2} pq \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

On note $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ la norme sur $\mathcal{V}$ associée. On considère donc l'espace de Hilbert $V$ complété de $\mathcal{V}$ pour cette norme. Soit maintenant $\ell$ la forme linéaire sur $V$ définie par $\ell(q) = \int_Q vq\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega gq(0)\,\mathrm{d}x$. Le résultat suivant est alors une application immédiate du théorème de Lax–Milgram.

**Proposition 1.2.** *On suppose que $\|\rho v\|_{L^2(Q)} < +\infty$. Alors il existe un unique $\tilde{p} \in V$ solution du problème :*

$$a(\tilde{p}, q) = \ell(q) \quad \forall q \in V. \tag{7}$$

*Si on pose*

$$y = \frac{1}{\rho^2} L^* \tilde{p}, \quad \textit{et} \quad \theta = -\frac{1}{\rho^2}\tilde{p} \cdot 1_\omega, \tag{8}$$

*alors le couple $\{y, \theta\}$ est solution du problème* (1), (2).

**Remarque 1.** On considère l'ensemble $L^2_\rho(Q) = \{w \in L^2(Q)$ tel que $\rho w \in L^2(Q)\}$, on note $(\cdot,\cdot)_\rho = (\rho\cdot, \rho\cdot)_{L^2(Q)}$ et $\|\cdot\|_\rho = \sqrt{(\cdot,\cdot)}_\rho$. D'après la Proposition 1.2, pour tout couple $(v, g)$ avec $v \in L^2_\rho(Q)$ et $g \in L^2(\Omega)$, il existe un couple $(\theta,\ y_\theta := y)$ solution du problème (1), (2). On définit ainsi deux applications

$$\begin{cases} L^2(Q) \times L^2(\Omega) \longrightarrow L^2\big(0, T; L^2(\omega)\big), \\ (v, g) \qquad\qquad \longmapsto \theta(v, g) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L^2(Q) \times L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(Q), \\ (v, g) \qquad\qquad \longmapsto y(v, g) \end{cases}$$

linéaires d'après (8). De plus les applications $v \mapsto \theta(v, 0)$ à valeurs dans $(L^2(0, T; L^2(\omega)), \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t)$ et $v \mapsto y(v, 0)$ à valeurs dans $L^2_\rho(Q)$ sont continues sur $L^2_\rho(Q)$.

## 2. Système d'optimalité pour le problème de contrôlabilité

Pour simplifier, on suppose ici que $G = L^2(\Omega)$. Pour tout $v \in L^2_\rho(Q)$, on définit la fonction coût *pondérée* :

$$J_\rho(v, g) = \big\|y(v, g) - z_d\big\|^2_\rho + N\|v\|^2_\rho, \tag{9}$$

où $z_d \in L^2_\rho(Q)$ et $N > 0$. Soit maintenant $\mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2_\rho(Q)$.

Par la Remarque 1, on obtient que $y(v, g) = y(v, 0) + y(0, g)$ et $\theta(v, g) = \theta(v, 0) + \theta(0, g)$. Ce qui permet d'écrire $J_\rho(v, g) - J_\rho(0, g) = J_\rho(v, 0) - J_\rho(0, 0) + 2\big(y(v, 0), y(0, g)\big)_\rho$.

**Lemme 2.1.** *Soit l'opérateur $M : g \mapsto \tilde{p}(0, g)$ de $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $(L^2(Q), \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t)$. Alors $M$ est linéaire continu sur $L^2(\Omega)$, et on a*

$$J_\rho(v, g) - J_\rho(0, g) = J_\rho(v, 0) - J_\rho(0, 0) + 2\big(S(v), g\big)_{L^2(\Omega)}, \tag{10}$$

*où $S$ est un opérateur linéaire continu sur $L^2_\rho(Q)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ tel que*

$$S(v) = M^*\big(v - \big(1/\rho^2\big)\tilde{p}(v, 0) \cdot 1_\omega\big) + \tilde{p}(v, 0)(0), \tag{11}$$

*où $M^*$ est l'adjoint de $M$.*

La preuve est simple et découle de la formulation variationnelle (7) et la Remarque 1.

On présente maintenant le système d'optimalité du contrôle *à moindres regrets* pour le problème à donnée *initiale* manquante (1), (2), et (9), défini pour $\gamma > 0$ par :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}}} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \big(J_\rho(v, g) - J_\rho(0, g) - \gamma\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\big). \tag{12}$$

En utilisant (10), ce problème est équivalent au problème de contrôle classique :

$$\inf_{v\in L^2_\rho(Q)} \mathcal{J}^\gamma_\rho(v) \quad \text{où } \mathcal{J}^\gamma_\rho(v) = J_\rho(v,0) - J_\rho(0,0) + \frac{1}{\gamma}\left\|S(v)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{13}$$

qui admet une solution unique $u_\gamma \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}}$ (voir [4] et [1] pour plus de détails).

**Théorème 2.1.** *Le contrôle à moindres regrets $u_\gamma \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}}$ est caractérisé par la donnée du quadruplet $\{u_\gamma, y_\gamma, \tilde\theta_\gamma, p_\gamma\} \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}} \times L^2(Q) \times V \times L^2(Q)$ solution unique du système*

$$\begin{cases} L\,y_\gamma = u_\gamma + \theta(u_\gamma,0)\cdot 1_\omega, \quad Lp_\gamma = y_\gamma - z_d + \tilde\theta_\gamma \cdot 1_\omega & \textit{dans } Q,\\ y_\gamma = 0, \quad p_\gamma = 0 & \textit{sur } \Sigma,\\ y_\gamma(0) = p_\gamma(0) = 0, \quad y_\gamma(T) = p_\gamma(T) = 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

*où $y_\gamma = y(u_\gamma,0)$, $p_\gamma = p(u_\gamma,0)$, $\tilde\theta_\gamma = \tilde\theta(u_\gamma,0)$, et de l'inégalité variationnelle*

$$\left(T^*[Lp_\gamma - \tilde\theta_\gamma \cdot 1_\omega] + N\rho^2 u_\gamma + (1/\gamma)S^*S(u_\gamma), v - u_\gamma\right)_{L^2(Q)} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}}, \tag{15}$$

*où $S^*$ est l'adjoint de l'opérateur $S$, et $T^*$ l'adjoint de l'opérateur $T : v \mapsto L^*\tilde p(v,0)$.*

**Démonstration.** La condition nécessaire d'Euler–Lagrange satisfaite par $u_\gamma$ donne

$$\left(y_\gamma - z_d, \rho^2 y(v-u_\gamma,0)\right)_{L^2(Q)} + N\left(\rho^2 u_\gamma, v-u_\gamma\right)_{L^2(Q)} + \frac{1}{\gamma}\left(S(u_\gamma), S(v-u_\gamma)\right)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}}.$$

On déduit par dualité :

$$\left(Lp_\gamma + \left(1/\rho^2\right)\sigma_\gamma \cdot 1_\omega, \rho^2 y(v-u_\gamma,0)\right)_{L^2(Q)} + N\left(\rho^2 u_\gamma + (1/\gamma)S^*S(u_\gamma), v-u_\gamma\right)_{L^2(Q)} \geqslant 0,$$

où $\sigma_\gamma = \sigma(u_\gamma,0)$ est l'unique solution de $a(\sigma_\gamma, q) = \int_Q (y_\gamma - z_d)q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. On définit alors l'état adjoint $p_\gamma = p(u_\gamma,0) = (1/\rho^2)L^*\sigma_\gamma$, vérifiant $Lp_\gamma = y_\gamma - z_d + \tilde\theta_\gamma \cdot 1_\omega$ où $\tilde\theta_\gamma = -(1/\rho^2)\sigma_\gamma$ dans $Q$, $p_{\gamma\,|\Sigma} = 0$, et $p_\gamma(0) = p_\gamma(T) = 0$. On a par ailleurs

$$\left(L\,p_\gamma - \tilde\theta_\gamma \cdot 1_\omega, \rho^2 y(v-u_\gamma,0)\right)_{L^2(Q)} = \left(T^*(Lp_\gamma - \tilde\theta_\gamma \cdot 1_\omega), v-u_\gamma\right)_{L^2(Q)} \quad \forall v \in \mathcal{U}^\rho_{\mathrm{ad}},$$

où $T^*$ est l'adjoint de l'opérateur linéaire continue $T : v \mapsto L^*\tilde p(v,0)$ de $L^2_\rho(Q)$ dans $(L^2_\rho(Q), \rho^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t)$. □

## 3. Conclusion

Pour ce problème de contrôle non standard, le système d'optimalité a cependant la même structure que les systèmes d'optimalité usuels. Plus précisement, on définit la notion d'état adjoint gouverné par un problème de contrôlabilité à zéro, comme l'état $y$ du système.

## Références

[1] R. Dorville, Sur le contrôle de quelques problèmes singuliers associés à l'équation de la chaleur, Thèse, à paraître.
[2] O.Yu. Emanuilov, Controllability of parabolic equations, Sb. Math. 186 (6) (1995) 879–900.
[3] J.L. Lions, Contrôle à moindres regrets pour les systèmes distribués à données manquantes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 330 (1992) 801–806.
[4] O. Nakoulima, A. Omrane, J. Velin, Perturbations à moindres regrets dans les systèmes distribués à données manquantes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 330 (2000) 801–806.
[5] J.P. Puel, Applications of global Carleman inequalities to contrôllabily and inverse problems, a paraître.