Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 87–90
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des nombres

Le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques

Abdallah Derbal [a,*], Abdelhakim Smati [b]

[a] *Département de mathématiques, École normale supérieure, BP 92, Vieux Kouba, Alger, Algérie*
[b] *Laco, UMR-CNRS 6090, université de Limoges, 123, avenue Albert Thomas, 87060 Limoges cedex, France*

Reçu le 3 février 2004 ; accepté après révision le 30 avril 2004

Disponible sur Internet le 17 juin 2004

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Soit $d_{k,\ell}(n)$ la fonction nombre des diviseurs de l'entier naturel $n \geqslant 1$, dans les progressions arithmétiques $\{\ell + mk\}$, avec $1 \leqslant \ell \leqslant k$ et ℓ, k premiers entre-eux, et soit $F(n; k, \ell)$ définie par :

$$F(n;k,\ell) = \frac{\ln d_{k,\ell}(n) \ln(\varphi(k) \ln n)}{\ln 2 \ln n}.$$

Dans cette Note, nous étudions et donnons la structure des nombres $d_{k,\ell}$-hautement composés supérieurs qui généralisent ceux définis par S. Ramanujan. Nous prouvons que le maximum absolu de $F(n; k, \ell)$ est atteint sur ces nombres et nous le donnons explicitement pour $k = 2, \ldots, 13$; généralisant ainsi l' étude faite par Nicolas et Robin pour $k = 1$. ***Pour citer cet article : A. Derbal, A. Smati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

The number of divisors of an integer in arithmetic progressions. Let $d_{k,\ell}(n)$ be the function number of divisors of the integer $n \geqslant 1$, in arithmetic progressions $\{\ell + mk\}$, with $1 \leqslant \ell \leqslant k$ and ℓ, k coprime, and let $F(n; k, \ell)$ defined as follows:

$$F(n;k,\ell) = \frac{\ln d_{k,\ell}(n) \ln(\varphi(k) \ln n)}{\ln 2 \ln n}.$$

In this Note, we study and give the structure of $d_{k,\ell}$-superior, highly composite numbers, which generalize those defined by S. Ramanujan. We prove that $F(n; k, \ell)$ reaches its maximum among these numbers. We give it explicitly for $k = 2, \ldots, 13$. This generalizes the study of Nicolas and Robin, in which the case $k = 1$ is treated. ***To cite this article: A. Derbal, A. Smati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : abderbal@yahoo.fr (A. Derbal), smati@unilim.fr (A. Smati).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.04.021

1. Introduction

Soient k et ℓ des entiers naturels tels que $1 \leqslant \ell \leqslant k$ et $(k, \ell) = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note par $d_{k,\ell}(n)$ le nombre des diviseurs de n dans la progression arithmétique $\{km + \ell\}$. La fonction $d_{k,\ell}(n)$ est une fonction arithmétique multiplicative, définie par

$$d_{k,\ell}(n) = \prod_{p^\alpha \| n,\ p \equiv \ell (k)} (\alpha + 1), \quad \left(n = \prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha\right),$$

où p est un nombre premier générique. Ainsi $d_{1,1}(n) = d(n)$ est le nombre des diviseurs de n. Posons

$$F(n; k, \ell) = \frac{\ln d_{k,\ell}(n) \ln(\varphi(k) \ln n)}{\ln 2 \ln n}, \tag{1}$$

où $\varphi(k)$ est l'indicateur d'Euler. D'après [2], le maximum absolu de la fonction $F(n; 1, 1)$ est atteint au nombre hautement composé supérieur (h.c.s.) $n = 6\,983\,776\,800$, et vaut 1,5379. Dans cette note nous étudions les fonctions $d_{k,\ell}(n)$ et $F(n; k, \ell)$. Nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 1.1.

(1) *On a* $\limsup F(n; k, \ell) = 1$ *et il existe une infinité de nombres $d_{k,\ell}$-h.c.s. N tels que $F(N; k, \ell) > 1$;*
(2) *La fonction $F(n; k, \ell)$ atteint son maximun absolu en un nombre $d_{k,\ell}$-h.c.s. ;*
(3) *Pour* $k = 1, 2, \ldots, 13$, *le maximum $\lambda(k)$ de $F(n; k, \ell)$ est donné dans le Tableau* 2, *à la Section* 3.

La définition et la structure des nombres $d_{k,\ell}$-h.c.s. sont données dans la Section 2, où nous suivons la méthode de Ramanujan. La notion de nombres hautement composés et hautement composés supérieurs fut introduite pour la première fois par Ramanujan dans son article de 1915 « Highly composite numbers » [3] et développée, par de nombreux auteurs dont Alaoglu, Erdős, Nicolas (voir l'article de synthèse de Nicolas [1] pour davantage d'informations et une abondante bibliographie sur le sujet). Dans son étude de l'ordre maximum de la fonction $d(n)$, Ramanujan a développé des idées susceptibles de généralisation à d'autres fonctions arithmétiques. Son idée majeure est la mise en évidence d'une suite d'entiers attachée à $d(n)$, qualifiés d'entiers hautement composés – ce sont les entiers qui ont plus de diviseurs que tout entier les précédant- et d'une suite d'entiers, dits hautement composés supérieurs, qui lui ont permis d'obtenir en particulier, l'ordre maximum de la fonction $d(n)$. Bien entendu, la portée de l'article de Ramanujan va bien au-delà de l'étude de l'ordre maximum de $d(n)$, dans la mesure où la structure fine des nombres hautement composés a été étudiée et que de nombreux problèmes intéressants et difficiles les concernant, notamment leur répartition, restent ouverts malgré les études importantes qui suivirent durant de nombreuses décennies.

2. Les nombres $d_{k,\ell}$-hautement composés supérieurs

Lemme 2.1 (et définition). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique nombre $N = N_{k,\ell,\varepsilon}$ vérifiant*

$$\frac{d_{k,\ell}(n)}{n^\varepsilon} \leqslant \frac{d_{k,\ell}(N)}{N^\varepsilon} \quad \text{pour } n \leqslant N \quad \text{et} \quad \frac{d_{k,\ell}(n)}{n^\varepsilon} < \frac{d_{k,\ell}(N)}{N^\varepsilon} \quad \text{pour } n > N.$$

Ce nombre est appelé $d_{k,\ell}$-hautement composé supérieur associé à ε.

Démonstration. La limite de la fonction $d_{k,\ell}(n)/n^\varepsilon$ étant nulle, elle atteint son maximum en un nombre fini d'entiers ; N en est alors le plus grand. □

Lemme 2.2 (et définition). *Pour tout entier $\alpha \geqslant 1$ et pour tout réel $x > 1$, on pose* $H(x, \alpha) = (\ln(1 + 1/\alpha))/\ln x$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $H(x,\alpha) = \varepsilon$ possède une unique racine $x_\alpha > 1$. On définit ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha\geqslant 1}$ dans $]1,+\infty[$. On pose $x_1 = x$. La suite $(x_\alpha)_{\alpha\geqslant 1}$ est strictement décroissante et vérifie les proprietés :

$$x_2 > \sqrt{2x} \quad \textit{pour } x \geqslant 60, \quad x_\alpha = x^{v(\alpha)} \quad \textit{où } v(\alpha) = \frac{\ln(1+1/\alpha)}{\ln 2} \quad \textit{et} \quad x^{1/\alpha} < x_\alpha < x^{1/\alpha \ln 2}.$$

Lemme 2.3. *Soient $\varepsilon > 0$, $N = N_{k,\ell,\varepsilon}$ le nombre $d_{k,\ell}$-h.c.s. associé à ε, et $p_1 = p_1(k,\ell)$ le premier nombre premier congru à ℓ modulo k.*

(1) *Tout diviseur premier p de N, d'exposant $\alpha \geqslant 1$, est congru à ℓ modulo k et vérifie*

$$H(p,\alpha+1) < \varepsilon \leqslant H(p,\alpha) \quad \textit{et} \quad x_{\alpha+1} < p \leqslant x_\alpha.$$

(2) *Si $\varepsilon > \varepsilon_1 = H(p_1,1)$ alors $N_{k,\ell,\varepsilon} = 1$.*

Lemme 2.4. *Soit p un nombre premier, $p \equiv \ell(k)$. On pose $E_p = \{H(p,\alpha), \alpha \geqslant 1\}$ et on note E la réunion de tous les ensembles E_p. Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à ε. On range les éléments de E en une suite décroissantes $\varepsilon_1 = H(p_1,1) > \varepsilon_2 > \cdots$.*

(1) *Soient ε_i et ε_{i+1} deux éléments consécutifs de E. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon < \varepsilon_i$, on a $N_{k,\ell,\varepsilon} = N_{k,\ell,\varepsilon_i}$.*
(2) *L'ensemble des nombres $d_{k,\ell}$-hautement composé supérieurs est*

$$\{1\} \cup \{N_{k,\ell,\varepsilon_i} \mid \varepsilon_i \in E\} \quad \textit{et on a} \quad 1 < N_{k,\ell,\varepsilon_1} < N_{k,\ell,\varepsilon_2} < \cdots.$$

(3) *Soit x défini par $H(x,1) = \varepsilon$. On a alors*

$$N = N_{k,\ell,\varepsilon} = \prod_{p\equiv\ell(k),\ x_2<p\leqslant x} p \prod_{p\equiv\ell(k),\ x_3<p\leqslant x_2} p^2 \cdots \prod_{p\equiv\ell(k),\ x_{m+1}<p\leqslant x_m} p^m,$$

où m est le plus grand indice tel que $x_{m+1} < p_1 \leqslant x_m$; Il est égal à la partie entière de $1/(p_1^\varepsilon - 1)$ et est équivalent à $\ln x/\ln 2 \ln p_1$ $(x \to +\infty)$.

Remarque 1. Le Tableau 1 donne, à titre d'exemples, les premiers nombres $d_{k,\ell}$-h.c.s. pour $k = 3$ et $\ell = 2$.

Lemme 2.5 (Voir [2] pour $k = 1$). *Soit N_0 le premier nombre $d_{k,\ell}$-h.c.s. tel que $N_0 \geqslant \exp(e^2/\varphi(k))$, et n entier, $n \geqslant 2$.*

(1) *Si $n \leqslant N_0$, alors $F(n;k,\ell) \leqslant F(N_0;k,\ell)$ et si n est tel que $N_0 \leqslant N_1 \leqslant n \leqslant N_2$, où N_1 et N_2 sont deux nombres $d_{k,\ell}$-h.c.s. consécutifs, alors $F(n;k,\ell) \leqslant \max(F(N_1;k,\ell), F(N_2;k,\ell))$.*
(2) *Soit $\lambda = \lambda(k,\ell) = \max_{n\geqslant 2} F(n;k,\ell) = F(N;k,\ell)$. Alors N est un nombre $d_{k,\ell}$-h.c.s. associé à*

$$\varepsilon = (\lambda \ln 2)\frac{(\ln(\varphi(k)\ln N)) - 1}{\ln^2(\varphi(k)\ln N)}.$$

3. Démonstration du Théorème 1.1

Les assertions 1 et 2 s'obtiennent par application des Lemmes 2.2 et 2.5. L'assertion 3 s'obtient à partir des Lemmes 2.4 et 2.5 et des majorations explicites des fonctions sommatoires des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, données dans [4] ainsi que du calcul effectif des nombres $d_{k,\ell}$-h.c.s. inférieurs ou

Tableau 1
Les onzes premiers nombres $d_{3,2}$-h.c.s.

ε	N_ε	$d_{3,2}(N_\varepsilon)$	$F(N_\varepsilon; 3, 2)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = H(2,1) = 1$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_2 = 0,584962\ldots$	2	2	0,471233...
$\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_3 = 0,430678\ldots$	2^2	3	1,165925...
$\varepsilon_3 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_4 = 0,415037\ldots$	$2^2 \times 5$	6	1,544848...
$\varepsilon_4 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_5 = 0,321928\ldots$	$2^3 \times 5$	8	1,625265...
$\varepsilon_5 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_6 = 0,289064\ldots$	$2^5 \times 5$	10	1,645533...
$\varepsilon_6 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_7 = 0,263034\ldots$	$2^4 \times 5.11$	20	1,661929...
$\varepsilon_7 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_8 = 0,251929\ldots$	$2^5 \times 5 \times 11$	24	1,659266...
$\varepsilon_8 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_9 = 0,244650\ldots$	$2^5 \times 5^2 \times 11$	36	1,650445...
$\varepsilon_9 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_{10} = 0,222392\ldots$	$2^5 \times 5^2 \times 11 \times 17$	72	1,641937...
$\varepsilon_{10} \geqslant \varepsilon > \varepsilon_{11} = 0,221064\ldots$	$2^6 \times 5^2 \times 11 \times 17$	84	1,636269...

Tableau 2
Les maxima absolus $\lambda(k)$ de $F(n; k, \ell)$ pour $k = 1, 2, \ldots, 13$ uniforme en ℓ

k	$\lambda(k)$	ℓ_0	$N = N_{k,\ell_0,\varepsilon}$	ε	$d_{k,\ell_0}(N)$	Σ
1	1,537939...	1	$2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$	0,235408...	2304	2896
2	1,348897...	1	$3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times \cdots \times 43$	0,184288...	46080	2876
3	1,6619289...	2	$2^4 \times 5 \times 11$	0,289064...	20	1464
4	1,448428...	3	$3^3 \times 7 \times 11 \times 19 \times 23$	0,210647...	64	1453
5	2,071053...	2	$2^3 \times 7$	0,356207...	8	743
6	1,298412...	5	$5^3 \times 11^2 \times 17 \times 23 \times 29 \times 41 \times 47 \times 53 \times 59 \times 71$	0,162608...	3072	1444
7	2,427439...	2	2^3	0,415037...	4	487
8	1,646895...	3	$3^3 \times 13$	0,261859...	8	734
9	2,427439...	2	2^3	0,415033...	4	500
10	1,614755...	3	$3^3 \times 13$	0,261859...	8	727
11	2,228805...	3	3^2	0,369070...	3	290
12	1,383712...	5	$5^3 \times 17 \times 29 \times 41 \times 53$	0,174583...	64	726
13	3,214459...	2	2^2	0,584962...	3	264

égaux à $N_{k,\ell}(25000)$. Le Tableau 2 donne les valeurs des maxima absolus $\lambda(k)$ de $F(n; k, \ell)$ pour $k = 1, 2, \ldots, 13$ uniforme en ℓ (Σ désignant le nombre de nombres d_{k,ℓ_0}-h.c.s $\leqslant N_{k,\ell_0}(25000)$).

Remerciements

Le premier auteur exprime ses remerciements au laboratoire Laco de l'Université de Limoges, où ce travail a été réalisé, de son accueil chaleureux.

Références

[1] J.-L. Nicolas, On highly composite numbers, in: G.E. Andrews, et al. (Eds.), Ramanujan Revisited, Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois, 1987, pp. 215–244.
[2] J.-L. Nicolas, G. Robin, Majorations explicites pour le nombre des diviseurs de n, Bull. Can. Math. 26 (4) (1983) 485–492.
[3] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 14 (1915) 347–409;
S. Ramanujan, in: Collected Papers, second ed., Chelsea, 1962, pp. 78–128.
[4] O. Ramaré, R. Rumely, Primes in arithmetic progressions, Math. Comp. 65 (213) (1996) 397–425.