Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 331–334

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des groupes/Géométrie algébrique

Résolutions flasques des groupes réductifs connexes

Jean-Louis Colliot-Thélène

CNRS UMR 8628, mathématiques, bâtiment 425, université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Reçu le 1er juin 2004 ; accepté le 8 juin 2004

Disponible sur Internet le 10 août 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Tout groupe réductif connexe G sur un corps k (de caractéristique nulle) peut s'écrire comme un quotient H/S, où S est un k-tore flasque central dans un k-groupe réductif H extension d'un k-tore quasitrivial par un k-groupe semisimple simplement connexe. De telles présentations de G permettent de simplifier l'étude du groupe $G(k)$ des points rationnels de G, de la cohomologie galoisienne de G et du groupe de Brauer d'une compactification lisse de G. ***Pour citer cet article : J.-L. Colliot-Thélène, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Flasque resolutions for connected reductive algebraic groups. A connected reductive group G over a (characteristic zero) field k may be written as a quotient H/S, where the k-group H is an extension of a quasitrivial torus by a simply connected group, and S is a flasque k-torus, central in H. Such presentations $G = H/S$ lead to a simplified approach to the Galois cohomology of G and related objects, such as the Brauer group of a smooth compactification of G. When k is a number field, one also recovers known formulas, in terms of S, for the quotient of the group $G(k)$ of rational points by R-equivalence, and for the Abelian groups which measure the lack of weak approximation and the failure of the Hasse principle for principal homogeneous spaces. ***To cite this article: J.-L. Colliot-Thélène, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Sur un corps de nombres, une série de travaux importants a établi pour les groupes semisimples simplement connexes les propriétés suivantes. Ils satisfont l'approximation faible, leurs espaces principaux homogènes satisfont le principe de Hasse, leur nombre de Tamagawa est égal à 1. Dans presque tous les cas, on a aussi établi que la R-équivalence [6] sur les k-points d'un tel groupe est triviale.

Ces propriétés ne valent en général pas pour un groupe réductif connexe quelconque. Pour mesurer le défaut de ces propriétés, on utilise la cohomologie galoisienne pour comprendre ce qui se passe lorsque l'on passe d'un tel groupe G au groupe semisimple simplement connexe G^{sc} revêtement universel du groupe dérivé G^{der} de G. Ce genre de travail a été fait par Sansuc [10], par Borovoi [1] et par Gille [8].

Adresse e-mail : Jean-Louis.Colliot-Thelene@math.u-psud.fr (J.-L. Colliot-Thélène).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.06.012

On trouve dans ce contexte deux méthodes dans la littérature, celle des revêtements spéciaux (cf. [10] et [8]) et celle des z-extensions (cf. [1] et [3]). Dans un travail récent [4], j'ai introduit une troisième méthode, celle des résolutions flasques des groupes réductifs – qu'on n'avait jusqu'ici définies et utilisées que pour les tores algébriques [6,11]. Je montre ici comment ces résolutions permettent d'obtenir de façon plus directe des résultats de Sansuc, Borovoi, Gille, Kunyavskiĭ, en particulier des résultats de [3], qui a inspiré le présent travail. Les démonstrations des résultats annoncés feront l'objet d'une publication ultérieure.

Soient k un corps, k_s une clôture séparable et $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Pour simplifier les énoncés, dans toute la note on supposera k de caractéristique nulle. La cohomologie utilisée dans cet article est la cohomologie galoisienne. Un k-tore T est un k-groupe algébrique linéaire qui, sur k_s, devient isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_m$. On note T^*, resp. T_*, le groupe des caractères, resp. des cocaractères, de T. Ce sont des modules galoisiens de type fini, libres sur $\mathbf{Z}$. Un tel module galoisien M est dit de permutation s'il possède une base sur $\mathbf{Z}$ respectée par $\mathfrak{g}$; il est dit flasque, resp. coflasque, si pour tout sous-groupe ouvert $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ le groupe de cohomologie $H^1(\mathfrak{h}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z}))$, resp. $H^1(\mathfrak{h}, M)$, est nul. Un k-tore est dit quasitrivial, resp. flasque, resp. coflasque, si son groupe de caractères est de permutation, resp. flasque, resp. coflasque. Si X est une variété sur un corps k et F est une extension de k, on note X_F le F-schéma $X \times_k F$. On note $X_s = X \times_k k_s$.

1. Groupes réductifs quasitriviaux et résolutions flasques

Proposition 1.1. *Pour un k-groupe réductif connexe H, les propriétés suivantes sont équivalentes* : (i) *Le k-groupe H est extension d'un k-tore quasitrivial par un k-groupe semisimple simplement connexe.* (ii) *Le groupe dérivé H^{der} de H est simplement connexe, et le groupe des caractères de H_s est un module de permutation.* (iii) *Le groupe de Picard de H_s est nul, et le groupe des caractères de H_s est un module de permutation.*

On dira qu'un tel groupe est un *groupe réductif quasitrivial*.

Le théorème suivant [4] généralise un résultat bien connu pour les k-tores algébriques [6,11].

Théorème 1.2. *Pour tout k-groupe réductif connexe G, on peut trouver une extension centrale de k-groupes $1 \to S \to H \to G \to 1$, avec H extension d'un k-tore quasitrivial par un k-groupe semisimple simplement connexe, et S un k-tore flasque.*

On dira qu'une telle suite $1 \to S \to H \to G \to 1$ est une *résolution flasque du groupe G*. On a pour ces résolutions la propriété de presque unicité suivante.

Proposition 1.3. *Soient $1 \to S \to H \to G \to 1$ et $1 \to S_1 \to H_1 \to G \to 1$ deux résolutions flasques du k-groupe réductif G. Alors* (i) *Il existe un k-isomorphisme de k-groupes algébriques $S \times_k H_1 \simeq S_1 \times_k H$.* (ii) *Il existe des modules de permutation P^* et P_1^* et un isomorphisme de modules galoisiens $S^* \oplus P_1^* \simeq S_1^* \oplus P^*$.*

2. Résolutions flasques et torseurs universels

Théorème 2.1. *Soit X une k-compactification lisse d'un k-groupe réductif connexe G. Soit S_0 le k-tore de groupe des caractères le module galoisien le groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(X_s)$. *Soit $\mathcal{T} \to X$ un torseur universel* [7] *sur X, de fibre triviale en l'élément neutre ϵ de $G(k)$. C'est un torseur sous S_0. Alors* : (i) *L'ouvert $\mathcal{T}_G = \mathcal{T} \times_X G \subset \mathcal{T}$ possède une structure de k-groupe algébrique connexe H tel que la projection $\mathcal{T}_G \to G$ soit un homomorphisme surjectif $H \to G$ de noyau* (*central*) *le k-tore S_0.* (ii) *La suite exacte de k-groupes $1 \to S_0 \to H \to G \to 1$ est une résolution flasque de G : le k-groupe H est un groupe réductif quasitrivial et le k-tore S_0 est flasque.*

La démonstration de ce résultat utilise le théorème de Borovoi et Kunyavskiĭ [3] selon lequel le module galoisien $S_0^* = \mathrm{Pic}(X_s)$ est flasque.

3. Résolutions flasques et complexes de Borovoi

Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque du k-groupe réductif connexe G, avec H extension d'un k-tore quasitrivial P par le k-groupe semisimple simplement connexe H^{der}. On a donc un homomorphisme induit $S \to P$. Le groupe dérivé H^{der} de H s'identifie au revêtement simplement connexe G^{sc} de G^{der}. Soit T un k-tore maximal dans G. On note T^{sc} le k-tore image réciproque de T dans G^{sc} via la flèche composée $G^{\mathrm{sc}} \to G^{\mathrm{der}} \hookrightarrow G$. Le complexe de k-tores utilisé par Borovoi [1] (en caractéristique 0) pour définir sa cohomologie abélianisée est $[T^{\mathrm{sc}} \to T]$. (On place T^{sc} en degré -1 et T en degré 0.)

Proposition 3.1. (i) *Le complexe de k-tores $[T^{\mathrm{sc}} \to T]$ est quasiisomorphe au complexe de k-tores $[S \to P]$.*

(ii) *Le complexe de modules galoisiens $[T^* \to T^{\mathrm{sc}*}]$ est quasiisomorphe au complexe de modules galoisiens $[P^* \to S^*]$.*

Borovoi [1] a défini des groupes de cohomologie abélianisée $H^0_{\mathrm{ab}}(k,G)$ et $H^1_{\mathrm{ab}}(k,G)$ et des applications $G(k) \to H^0_{\mathrm{ab}}(k,G)$ et $H^1(k,G) \to H^1_{\mathrm{ab}}(k,G)$. La proposition ci-dessus donne des isomorphismes $H^0_{\mathrm{ab}}(k,G) \simeq H^0(k,[S \to P])$ et $H^1_{\mathrm{ab}}(k,G) \simeq H^1(k,[S \to P])$. Le groupe $H^0(k,[S \to P])$ admet pour quotient le groupe $H^1(k,S)$. On a $H^1(k,[S \to P]) \simeq \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$. On peut gager que les applications $G(k) \to H^0_{\mathrm{ab}}(k,G)$ et $H^1(k,G) \to H^1_{\mathrm{ab}}(k,G)$ définies par Borovoi sont ainsi reliées aux applications déduites de la cohomologie galoisienne de la résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$.

4. Résolutions flasques et groupe fondamental des groupes réductifs

Soient $T \subset G$ comme ci-dessus. Le groupe fondamental $\pi_1(G_s)$ de G est le module galoisien conoyau de la flèche de cocaractères $T^{\mathrm{sc}}{}_* \to T_*$. Cette définition est indépendante du choix de T (Borovoi [1]).

Proposition 4.1. *Un k-groupe réductif connexe est quasitrivial si et seulement si son groupe fondamental $\pi_1(G_s)$ est un module de permutation.*

Proposition 4.2. *Une résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$, avec H extension d'un k-tore quasitrivial P par un k-groupe semisimple simplement connexe, induit une résolution coflasque du module galoisien $\pi_1(G_s)$, à savoir la suite exacte $0 \to S_* \to P_* \to \pi_1(G_s) \to 0$, où S_* est un module galoisien coflasque et P_* est un module de permutation.*

C'est par le biais d'une telle résolution coflasque de $\pi_1(G_s)$, qu'on peut trouver a priori, que Borovoi et Kunyavskiĭ [3] définissent le module galoisien S_* (à addition près d'un module de permutation). Ils établissent les isomorphismes des énoncés 5.1, 6.2 et 6.3 ci-après.

5. Groupe de Brauer d'une compactification lisse

Théorème 5.1. *Soient G un k-groupe réductif connexe, $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque du k-groupe G et X une k-compactification lisse de G. Alors* $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(k,S^*)$.

Ceci résulte des énoncés 1.3 et 2.1. Combinant 3.1 et 5.1, on retrouve une formule de [2].

6. Cohomologie galoisienne des groupes réductifs

Soit G un k-groupe réductif connexe. Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G, avec H extension d'un k-tore quasitrivial P par un k-groupe semisimple simplement connexe. Ces données fournissent un homomorphisme $G(k) \to H^1(k,S)$ et une flèche d'ensembles pointés $H^1(k,G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$.

Proposition 6.1. *Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque d'un k-groupe réductif connexe G.*

(i) *Cette résolution flasque induit une suite exacte $H(k)/R \to G(k)/R \to H^1(k, S) \to H^1(k, H)$.*
(ii) *Le quotient de $G(k)/R$ par l'image de $H(k)$ ne dépend pas de la résolution flasque de G.*
(iii) *Si k est un corps de type fini sur le corps premier, alors ce quotient est fini.*

Les deux théorèmes suivants, variantes de [3], généralisent des résultats de [6,11,10,8,9,5].

Théorème 6.2. *Supposons que k est de dimension cohomologique $\leqslant 2$ et que, sur toute extension finie de k, indice et exposant des algèbres simples centrales coïncident. Supposons en outre que la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k est $\leqslant 1$. Une résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$ d'un k-groupe réductif connexe G induit un isomorphisme $G(k)/R \simeq H^1(k, S)$ et une bijection de $H^1(k, G)$ avec* $\mathrm{Ker}[H^2(k, S) \to H^2(k, P)]$.

La démonstration utilise des résultats de [9] et [3]. Les hypothèses sur le corps k assurent en particulier que la conjecture II de Serre vaut (cf. [5]). Elles sont satisfaites dans chacun des cas suivants : k est un corps p-adique ; k est un corps de nombres totalement imaginaire ; k est le corps des fractions d'un anneau local intègre strictement hensélien de dimension 2 et de corps résiduel de caractéristique 0. Un corps k de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 est de dimension cohomologique 2 ; l'hypothèse indice/exposant est satisfaite (théorème récent de de Jong). On ne connaît pas dans ce cas la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k, mais l'hypothèse qu'elle est au plus 1 n'est utilisée dans la proposition ci-dessus que lorsqu'il y a dans G des facteurs de type E_8. Dans chacun des cas mentionnés, le groupe $H^1(k, S)$ est fini pour S un k-tore flasque, le groupe quotient $G(k)/R$ est donc fini.

Théorème 6.3. *Soient k un corps de nombres et Ω l'ensemble de ses places. Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque d'un k-groupe réductif connexe G.*

(i) *Cette résolution induit une suite exacte de groupes finis $H^{\mathrm{der}}(k)/R \to G(k)/R \to H^1(k, S) \to 0$.*
(ii) *Elle induit un isomorphisme entre le groupe $A(G)$, quotient du groupe $\prod_{v\in\Omega} G(k_v)$ par l'adhérence de l'image diagonale de $G(k)$, et le groupe abélien fini* $\mathrm{Coker}[H^1(k, S) \to \bigoplus_{v\in\Omega} H^1(k_v, S)]$.
(iii) *Elle induit une bijection entre l'ensemble* $\mathrm{Ker}[H^1(k, G) \to \prod_{v\in\Omega} H^2(k_v, G)]$ *et le groupe abélien fini* $\mathrm{Ker}[H^2(k, S) \to \prod_{v\in\Omega} H^2(k_v, S)]$.

Références

[1] M. Borovoi, Abelian Galois cohomology of reductive groups, Mem. Amer. Math. Soc. 132 (626) (1998).
[2] M. Borovoi, B. Kunyavskiĭ, Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group, J. Algebra 225 (2000) 804–821.
[3] M. Borovoi, B. Kunyavskiĭ, Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields, with an appendix by P. Gille, J. Algebra 276 (2004) 292–339.
[4] J.-L. Colliot-Thélène, Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p-adique, Invent Math. (2004), à paraître.
[5] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille, R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, Duke Math. J. 121 (2004) 285–341.
[6] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 10 (1977) 175–229.
[7] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. 54 (1987) 375–492.
[8] P. Gille, La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, Publ. Math. I.H.É.S. 86 (1997) 199–235.
[9] P. Gille, Cohomologie galoisienne des groupes quasidéployés sur des corps de dimension cohomologique $\leqslant 2$, Compositio Math. 125 (2001) 283–325.
[10] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires, J. Reine Angew. Math. (Crelle) 327 (1981) 12–80.
[11] V.E. Voskresenskiĭ, Algebraicheskie Tory, Nauka, Moscou, 1977.