



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 733–738



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse numérique
Famille de schémas implicites uniformément contrôlables
pour l'équation des ondes 1-D

Arnaud Münch

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid, Espagne

Reçu le 4 juin 2004 ; accepté le 21 septembre 2004

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans le cadre de la contrôlabilité exacte, on présente dans cette Note une famille paramétrée de schémas aux différences finis de l'équation des ondes 1-D. Ces schémas diffèrent des schémas centrés usuels par l'ajout de termes d'ordre h^2 , h désignant le pas de la discrétisation en espace. En s'appuyant sur une version discrète de l'inégalité d'Ingham pour les séries de Fourier non harmoniques, sur les propriétés spectrales et sur les diagrammes de dispersion des schémas, on détermine les paramètres assurant une propriété de contrôlabilité discrète uniforme en h et pour lesquels la condition de stabilité CFL est optimale. **Pour citer cet article :** A. Münch, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Family of implicit schemes uniformly controllable for the 1-D wave equation. We present a parameterized family of finite difference schemes for the exact controllability of the 1-D wave equation. These schemes differ from the usual centered ones by additional terms of order to h^2 , where h denotes the discretization step in space. Using a discrete version of Ingham's inequality for nonharmonic Fourier series, the spectral properties and dispersion diagrams of the schemes, we determine the parameters leading to a uniform controllability property with respect to h and an optimal stability CFL condition. **To cite this article:** A. Münch, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In the context of the boundary controllability problem of the 1-D wave equation the following result is well known [9]: let be $T \geq 2$ and $(y_0, y_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$, there exists a control $v \in L^2(0, 1)$ such that the solution y of the system (1) satisfies (2). This controllability property is equivalent to the existence of a constant $C(T) > 0$ such that the observability inequality (3) holds, u being the solution of the conservative system (4). We

Adresse e-mail : arnaud.munch@uam.es (A. Münch).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.09.037

address in this Note the numerical approximation of this problem which is by now well-known to be extremely sensitive: for instance, the classical centered finite difference semi-discrete approximation in space (\mathcal{S}_h^0) (see (5)) of (4) leads to a semi-discrete observability equality similar to (3) where the constant $C_h(T)$ depending now on the mesh size h blows-up as h goes to zero for all $T > 0$. Therefore, the observability inequality is not uniform with respect to h leading to a bad behavior of the control of the finite difference semi-discrete approximation [3]. This is due to the fact that the interaction of waves with a numerical mesh produces dispersion phenomena and spurious high frequency oscillations. Because of this nonphysical interaction the velocity of propagation of such numerical waves, the so called *group velocity* may converge to zero when the wavelength of solutions is of order of the mesh size h leading to the time of controllability of order $1/h$. During the last decade, various remedies have been introduced (see [1,3,9] and the references therein). All of them require, in a way or another to filter out the high frequency spurious oscillations.

In this Note, we present a simple technique that ensure uniform controllability based on the addition to the usual centered scheme of corrector terms of order h^2 . We first introduce a semi-discrete finite scheme (\mathcal{S}_h^θ) parameterized by $\theta \in [0, 1/4]$ for which a uniform inequality observability holds provided that $\theta \in [\theta_h, 1/4]$, θ_h being defined by (9) (see Theorem 2.1). According to a theoretical result on nonharmonic Fourier series due to Ingham [4], this uniform observability is related to a uniform spectral gap property (see (12)) with respect to h of the spectrum associated to (\mathcal{S}_h^θ). In a second part of the Note, we introduce an additional parameter $\alpha \geq 0$ and a fully discrete and implicit scheme (in space and in time) ($\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}$). Δt denotes the discretization step in time. In the case $\theta = \alpha = 0$, ($\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{0,0}$) corresponds to the usual centered finite difference scheme which is uniformly controllable if and only if $\Delta t = h$ [7]. Using a discrete Ingham inequality [8] it appears that the uniform observability inequality with respect to h and to Δt depends of the value of α and θ . In the case $\theta, \alpha \in [0, 1/4]$, the uniform observability (20) holds provided that T is large enough and $\Delta t/h = \sqrt{(1-4\theta)/(1-4\alpha)}$ (Theorem 3.2). This permits us to obtain uniformly controllable and convergent schemes in the two cases $\Delta t < h$ and $\Delta t > h$. In the case $\Delta t < h$, the implicit schemes ($\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{1/12,\alpha}$), $\alpha < 1/12$, of order 4 in space and 2 in time, uniformly controllable for $T \geq 2$ appear optimal. Conversely, in the case $\Delta t > h$, the implicit schemes ($\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,1/12}$), $\theta < 1/12$, of order 4 in time and 2 in space, uniformly controllable for $T \geq 2(\Delta t/h)^2$ appear optimal. For $\theta \in [0, 1/4]$, $\alpha = 1/4$ or $\theta \geq 0$, $\alpha > 1/4$, the uniform observability inequality does not hold (Theorem 3.4).

1. Introduction

La propriété de contrôlabilité frontière exacte de l'équation des ondes 1-D suivante est bien connue [9] : étant donné un temps $T \geq 2$ et $(y_0, y_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$, il existe un contrôle $v \in L^2(0, 1)$ tel que l'unique solution y du système (en notant $y' \equiv \frac{\partial y}{\partial t}$),

$$\begin{cases} y'' - y_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = v(t), & 0 < t < T, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

satisfasse :

$$y(x, T) = y'(x, T) = 0, \quad \forall 0 < x < 1. \quad (2)$$

Cette propriété est équivalente à l'obtention de l'existence d'une constante $C(T) > 0$ telle que l'inégalité d'observabilité,

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(1, t)|^2 dt, \quad \text{avec } E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 [|u_x(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2] dx \quad \forall 0 \leq t < T, \quad (3)$$

soit satisfaite, quelque soit u solution du système conservatif (c.a.d., $E(t) = E(0)$ pour tout $t \in [0, T]$) :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (4)$$

L'approximation numérique de ce problème, que nous abordons dans cette Note, est très sensible aux choix du schéma d'approximation du système (4) mais également à la régularité des données initiales (u_0, u_1) [6,9]. Ainsi, le schéma aux différences finies semi-discret, centré en espace (S_h^0) , conduit à une inégalité d'observabilité analogue à (3) mais où la constante $C_h(T)$ dépendant du pas h diverge lorsque h tend vers zéro quelque soit $T > 0$. Il en résulte que la propriété d'observabilité n'est pas uniforme vis-à-vis de h conduisant à un mauvais comportement de l'approximation v_h du contrôle v issue de la méthode HUM [3]. Cela est dû au fait que l'approximation génère des ondes numériques haute fréquence, inexistantes au niveau continu et dont la vitesse de propagation peut converger vers zéro lorsque le pas du maillage h converge vers zéro. Ces dix dernières années, plusieurs remèdes ont été proposés (voir [9] et ses références), tous basés, de près ou de loin, sur un filtrage des composantes haute fréquence de la solution.

2. Une famille de schémas semi-discret uniformément contrôlables en h

On considère la famille de semi-discrétisation numérique suivante du système (4), paramétrée par $\theta \in [0, 1/4]$:

$$(S_h^\theta) \quad \begin{cases} \theta u''_{j+1}(t) + (1 - 2\theta)u''_j(t) + \theta u''_{j-1}(t) = \Delta_h u_j(t), & j = 1, \dots, J, \ 0 < t < T, \\ u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u_j(0) = u_{j,0}, \quad u'_j(0) = u_{j,1}, & j = 0, \dots, J + 1, \end{cases} \quad (5)$$

où $u_j(t)$ désigne l'approximation de u au point $x_j = jh, j = 0, \dots, J + 1$, et h le pas du maillage tel que

$$h = 1/(J + 1) \quad \text{et} \quad \Delta_h u_j(t) = (u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t))/h^2, \quad j = 1, \dots, J. \quad (6)$$

Remarque 1. Le schéma (S_h^θ) s'écrit également sous la forme :

$$(1 + \theta h^2 \Delta_h)u''_j(t) = \Delta_h u_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \ 0 < t < T. \quad (7)$$

L'énergie semi-discrete associée au schéma : (S_h^θ) est

$$E_h^\theta(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[u'_j(t)^2 - \theta (u'_{j+1}(t) - u'_j(t))^2 + \left(\frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right)^2 \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

et elle est constante : $E_h^\theta(t) = E_h^\theta(0)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Introduisons maintenant le paramètre suivant :

$$\theta_h \equiv (1 - (3\pi h/4)^{2/3})/4 \in (0, 1/4], \quad h \ll 1. \quad (9)$$

Théorème 2.1. Pour tout $T \geq 2$ et $\theta \in [\theta_h, 1/4]$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de h , telle que

$$E_h^\theta(0) \leq C(\theta, T) \int_0^T \left(\left| \frac{u_J(t)}{h} \right|^2 + \theta h^2 \left| \frac{u'_J(t)}{h} \right|^2 \right) dt. \quad (10)$$

Cette inégalité d'observabilité uniforme en h , qui assure la contrôlabilité uniforme du schéma (5) pour $1/4 \geq \theta > \theta_h$ est liée à un résultat sur les séries de Fourier non harmoniques dû à Ingham [4]. Afin d'utiliser ce résultat, on introduit les J valeurs propres $0 < \lambda_1^\theta < \dots < \lambda_J^\theta$ du problème $-\Delta_h w_k = \lambda(1 + \theta h^2 \Delta_h) \cdot w_k$, pour $k = 1, \dots, J$ et $w_0 = w_{J+1} = 0$ associé à (\mathcal{S}_h^θ) :

$$\lambda_k^\theta = \frac{4}{h^2} \frac{\sin^2(k\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(k\pi h/2)}, \quad k = 1, \dots, J, \quad \forall \theta \in [0, 1/4]. \quad (11)$$

Proposition 2.2. Pour tout $\theta \in [\theta_h, 1/4]$, on a :

$$\sqrt{\lambda_k^\theta} - \sqrt{\lambda_{k-1}^\theta} \geq \pi + O(h), \quad \forall k \in [2, J]. \quad (12)$$

Il résulte de l'inégalité (12) que l'écart entre les racines de deux valeurs propres consécutives est minoré uniformément en h , assurant, d'après [4] (voir [1] pour le cas $\theta = 1/4$) l'inégalité (10). Il résulte de (10) que le schéma semi-discret (5) est uniformément contrôlable en h pour $\theta \in [\theta_h, 1/4]$: le contrôle $(v_h)_{h>0}$ de ce schéma converge fortement dans $L^2(0, T)$ vers le contrôle v du problème continu (1) lorsque h tend vers zéro.

3. Une famille de schémas discrets uniformément contrôlables en h et en Δt

Soit $\alpha \geq 0$. Considérons le schéma aux différences finis en temps et en espace suivant :

$$(\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}) \quad \begin{cases} (1 + \theta h^2 \Delta_h) \Delta_{\Delta t} u_j^n = \Delta_h (\alpha u_j^{n+1} + (1 - 2\alpha) u_j^n + \alpha u_j^{n-1}), & j = 1, \dots, J, \quad n = 0, \dots, N, \\ u_0^n = u_{J+1}^n = 0, & n = 0, \dots, N, \\ u_j^0 = u_{j,0}, \quad (u_j^1 - u_j^{-1})/2/\Delta t = u_{j,1}, & j = 0, \dots, J + 1, \end{cases} \quad (13)$$

où u_j^n désigne l'approximation de u au point x_j et au temps $n\Delta t$ et Δt le pas de temps tel que

$$\Delta t = 1/(N + 1) \quad \text{et} \quad \Delta_{\Delta t} u^n = (u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1})/\Delta t^2, \quad n = 0, \dots, N. \quad (14)$$

Remarque 2. Le schéma $(\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ s'écrit sous la forme synthétique suivante :

$$(1 + \theta h^2 \Delta_h) \Delta_{\Delta t} u_j^n = (1 + \alpha \Delta t^2 \Delta_{\Delta t}) \Delta_h u_j^n, \quad j = 1, \dots, J, \quad n = 0, \dots, N. \quad (15)$$

Il en résulte puisque $\Delta_{\Delta t} (\Delta_h u_j^n) = \Delta_h (\Delta_{\Delta t} u_j^n)$ que $(\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}) = (\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta_v,0})$ avec $\theta_v \equiv \theta - \alpha v^2$ et $v = \Delta t/h$.

- Le schéma $(\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,0})$ correspond à la discrétisation usuelle, centrée en temps, du schéma (\mathcal{S}_h^θ) .
- Le schéma $(\mathcal{S}_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est un schéma aux différences finis de type Newmark [2].

L'énergie discrète $E_n^{\theta,\alpha}$, $n = 0, \dots, N$, associée au schéma (13), est :

$$E_n^{\theta,\alpha} = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \theta_v \left[\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \right]^2 + \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{h} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) \right] \quad (16)$$

et est constante : $E_n^{\theta,\alpha} = E_0^{\theta,\alpha}$, $\forall n = 0, \dots, N$.

Proposition 3.1. *Le schéma $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est stable si et seulement si :*

$$\sin^2(j\pi h/2)(v^2(1 - 4\alpha) + 4\theta) \leq 1, \quad \forall j \in [1, J]. \tag{17}$$

– *La consistance du schéma $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est de l'ordre de :*

$$(\theta - 1/12)O(h^2) + (\alpha - 1/12)O(\Delta t^2) + O(h^4) + O(\Delta t^4) + O(h^2 \Delta t^2), \quad \forall \theta, \alpha \geq 0. \tag{18}$$

Dans le cas $\alpha = \theta = 0$ et $h = \Delta t$, cet ordre de consistance est arbitrairement grand.

Il résulte de (17) :

- si $\alpha, \theta \in [0, 1/4)$, alors $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est stable si $v \leq \sqrt{(1 - 4\theta)/(1 - 4\alpha)}$;
- si $\theta = 1/4$ et $\alpha \in [0, 1/4)$, alors $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est stable si $v \leq (\pi/2)^2/\sqrt{1 - 4\alpha} h$;
- si $\theta > 1/4$ et $\alpha \in [0, 1/4]$, alors $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est instable quelque soit v ;
- si $\theta \in [0, 1/4]$ et $\alpha \geq 1/4$, alors $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est stable quelque soit v ;
- si $\theta, \alpha > 1/4$, alors $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ est stable si $v \geq \sqrt{(1 - 4\theta)/(1 - 4\alpha)}$.

A l'image du cas semi-discret, les propriétés d'observabilité sont liées aux J valeurs propres $0 < \lambda_1^{\theta,\alpha} < \dots < \lambda_J^{\theta,\alpha}$ associées au schéma $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$, pour tout θ, α vérifiant (17) :

$$\lambda_j^{\theta,\alpha} = \left[\frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{v \sin(j\pi h/2)}{\sqrt{1 - 4(\theta - \alpha v^2) \sin^2(j\pi h/2)}} \right) \right]^2, \quad \forall j = 1, \dots, J. \tag{19}$$

Théorème 3.2. *Soient $\alpha, \theta \in [0, 1/4)$ et $v = \sqrt{(1 - 4\theta)/(1 - 4\alpha)}$. Pour tout $T \geq 2 \max(1, v^2)$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et Δt telle que l'inégalité d'observabilité discrète ait lieu :*

$$E_0^{\theta,\alpha} \leq C \Delta t \sum_{n=0}^N \left(\left| \frac{u_J^n}{h} \right|^2 + \theta v h^2 \left| \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{h \Delta t} \right|^2 \right). \tag{20}$$

– *Le même résultat a lieu lorsque $\theta = \alpha = 1/4$ avec v quelconque et lorsque $\theta = 1/4, \alpha \in [0, 1/4)$ avec $v = (\pi/2)^2/\sqrt{1 - 4\alpha} h$.*

A nouveau, ce type de résultat repose sur une propriété d'écart uniforme sur le spectre.

Proposition 3.3. *Si $\alpha, \theta \in [0, 1/4)$, $\theta = \alpha = 1/4$ ou $\theta = 1/4, \alpha \in [0, 1/4)$ et v vérifiant (17), alors les valeurs propres $\lambda_j^{\theta,\alpha}$ vérifient les relations :*

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_j^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{j-1}^{\theta,\alpha}} &\geq \pi \min(1, v^{-2}) + O(h^2), \quad \forall j = 2, \dots, J, \\ \left| \sqrt{\lambda_k^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_l^{\theta,\alpha}} \right| &\leq 2\pi \Delta t^{-1} + O(1), \quad \forall k, l = 1, \dots, J. \end{aligned} \tag{21}$$

Le résultat de [8] donnant une version discrète de l'inégalité d'Ingham permet alors d'obtenir le résultat (20). Ce résultat implique la contrôlabilité uniforme vis-à-vis de h et donc de Δt du schéma $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$.

En revanche, pour les autres cas ($\theta \in [0, 1/4)$, $\alpha = 1/4$ ou $\theta \geq 0, \alpha > 1/4$), le schéma $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$ ne possède pas de cette propriété, on a le :

Théorème 3.4. Si $\theta \in [0, 1/4)$, $\alpha = 1/4$ ou $\theta \geq 0$ et $\alpha > 1/4$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{u \text{ solution de (13)}} \frac{E_0^{\theta, \alpha}}{\Delta t \sum_{n=0}^N (|u_J^n/h|^2 + \theta_\nu h^2 |(u_J^{n+1} - u_J^n)/(h \Delta t)|^2)} = +\infty. \quad (22)$$

Cela résultant du fait, que dans ces deux cas, on a la :

Proposition 3.5. Si $\theta \in [0, 1/4)$, $\alpha = 1/4$ ou $\theta \geq 0$ et $\alpha > 1/4$, alors

$$\sqrt{\lambda_J^{\theta, \alpha}} - \sqrt{\lambda_{J-1}^{\theta, \alpha}} = O(h). \quad (23)$$

Remarque 3.

- En prenant $\alpha = \theta = 0$ (menant à $\theta_\nu = 0$) et $\Delta t = h$ (soit $\nu = 1$) dans le Théorème 3.2, on retrouve le résultat de contrôlabilité uniforme avec $T \geq 2$ pour le schéma explicite aux différences finies usuel ($S_{h, \Delta t}^{0,0}$) [7].
- Le Théorème 3.2 montre que l'on peut obtenir l'observabilité uniforme pour des valeurs du pas de discrétisation en temps différente du pas de discrétisation en espace. Lorsque l'on prend $\Delta t > h$ (soit $\nu > 1$), il semble intéressant de considérer le schéma ($S_{h, \Delta t}^{1/4, 1/4}$) implicite, d'ordre 2 en temps et en espace, stable et uniformément contrôlable pour tout $T \geq 2\nu^2 > 2$. Un second choix, numériquement plus efficace, est de considérer le schéma ($S_{h, \Delta t}^{\theta, 1/12}$) avec $\theta < 1/12$ et $\nu = \sqrt{(1-4\theta)/(1-1/3)}$, d'ordre 4 en temps et 2 en espace (en vertu de (18)), uniformément contrôlable pour $T \geq 2\nu^2 > 2$.
- A l'inverse, lorsque l'on prend $\Delta t < h$ (soit $\nu < 1$), il semble intéressant de considérer le schéma ($S_{h, \Delta t}^{1/12, \alpha}$) implicite, avec $\alpha < 1/12$ et $\nu = \sqrt{(1-1/3)/(1-4\alpha)}$, d'ordre 4 en espace, 2 en temps, stable et uniformément contrôlable pour $T \geq 2$.
- En vertu des réécritures (7) et (15), le schéma ($S_{h, \Delta t}^{\theta, \alpha}$) diffère du schéma centré usuel ($S_{h, \Delta t}^{0,0}$) par l'ajout de termes proportionnels à h^2 et à Δt^2 . Selon le Théorème 3.2, ces termes supplémentaires permettent d'obtenir l'observabilité uniforme. Cet aspect est en bon accord avec la technique proposée dans [3], utilisant une régularisation de Tychonov, mais également avec [5].

Remerciements

Ce travail a été réalisé au cours d'un séjour à l'"Universidad Autonoma de Madrid" dans le groupe du Pr. Enrique Zuazua et supporté par le programme de recherche européen *New materials, adaptive systems and their nonlinearities : modelling, control and numerical simulations* (HPRN-CT-2002-00284).

Références

- [1] C. Castro, S. Micu, Boundary controllability of a semi-discrete linear 1-D wave equation with mixed finite elements, SIAM J. Numer. Anal., submitted for publication.
- [2] G.C. Cohen, Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations, Scientific Computation, Springer, 2002.
- [3] R. Glowinski, C. Li, J.L. Lions, A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation, Japan. J. Appl. Math. 3 (1990) 1–76.
- [4] A.E. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, Math. Z. 41 (1936) 367–369.
- [5] S. Krenk, Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2001) 975–987.
- [6] S. Micu, Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1-D wave equation, Numer. Math. 91 (2002) 723–728.
- [7] M. Negreanu, E. Zuazua, Uniform boundary controllability of a discrete 1-D wave equation, Systems Control Lett. 48 (3–4) (2003) 261–280.
- [8] M. Negreanu, E. Zuazua, Discrete Ingham inequalities and applications, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 281–286.
- [9] E. Zuazua, Propagation, observation, control and numerical approximation of waves, Preprint, available at <http://www.uam.es/enrique.zuazua/>.