Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 1–4

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Sur un problème de S. Ramanujan

Abdelhakim Smati

Laco, UMR-CNRS 6090, université de Limoges, 123, avenue Albert-Thomas, 87060 Limoges cedex, France

Reçu le 14 septembre 2004 ; accepté après révision le 15 novembre 2004

Disponible sur Internet le 19 décembre 2004

Présenté par Christophe Soulé

À Jean-Louis Nicolas, en toute amitié

Résumé

En 1915, Srinivasa Ramanujan donne une borne inférieure de l'ordre maximum de la fonction itérée du nombre des diviseurs, $d(d(n))$. En 1989, Paul Erdős et Aleksandar Ivić en donnent une borne supérieure. Dans cette Note, on détermine l'ordre maximum de $\omega(d(n))$, le nombre de diviseurs premiers de $d(n)$, et on en déduit une amélioration du résultat d'Erdős et Ivić sur l'ordre maximum de $d(d(n))$. ***Pour citer cet article : A. Smati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

On a problem by S. Ramanujan. In 1915, Srinivasa Ramanujan gives a lower limit for the maximum order of the iterated of the divisors function, $d(d(n))$. In 1989, Paul Erdős and Aleksandar Ivić give a upper bound. In this Note, we find the maximal order of the function $\omega(d(n))$, the number of prime divisors of $d(n)$, and we improve the result of Erdős and Ivić on the maximal order of $d(d(n))$. ***To cite this article: A. Smati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Dans les dernières lignes de son long article de 1915, intitulé "Highly composite numbers ", Ramanujan [4] et [5] (No. 15), donne une borne inférieure de l'ordre maximun de la fonction itérée du nombre des diviseurs, $d(d(n))$, posant ainsi, implicitement, le problème de l'étude de d'ordre maximum de cette fonction. De façon précise, il énonce que pour $N_k = 2^{2-1}\,3^{3-1}\cdots p_k^{p_k-1}$ où pour $k \geqslant 1$, p_k désigne le k-ième nombre premier,

$$d\big(d(N_k)\big) > 4^{\sqrt{2\log N_k}/(\log\log N_k)}.$$

Adresse e-mail : smati@unilim.fr (A. Smati).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.11.014

L'article de Ramanujan est d'abord consacré à l'étude de l'ordre maximum de la fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de l'entier naturel n. Pour cela, Ramanujan a introduit la notion de nombres hautement composés – un nombre est hautement composé, s'il possède plus de diviseurs que tout entier le précédant – notion féconde par les développements auxquels elle a donné lieu par la suite et par les problèmes intéressants qu'elle soulève. On pourra consulter à ce sujet l'article [3] d'exposition de Jean-Louis Nicolas dans lequel on trouvera une analyse de l'article de Ramanujan et une description des développements qu'il a inspiré par la suite sous l'impulsion, notamment, de Erdős. Ramanujan a fait une étude approfondie des nombres hautement composés et a considérablement amélioré les résultats de Wigert [7] sur l'ordre maximum de $d(n)$. Cependant, à travers son article, mais à l'arrière-plan, transparait l'étude de la fonction $d(d(n))$. Il donne, dans une table, les 103 premiers entiers hautement composés N, et à côté des valeurs numériques de $d(N)$, celles de $d(d(N)$. Il détermine également l'ordre de grandeur de $d(d(N))$ sur la suite des nombres hautement composés en montrant que, pour N hautement composé,

$$d\big(d(N)\big) = (\log N)^{\frac{1}{\log 2}(\log\log\log\log N+\gamma+\mathrm{O}(1/(\log\log\log N)))}$$

où γ étant la constante d'Euler.

Les premiers à revenir à ce problème furent Erdős et Kátai [2]. En 1969, ils posent le problème de façon générale, c'est-à-dire celui de la détermination de l'ordre maximum de la k-ième itérée de la fonction nombre des diviseurs et en donnent un premier résultat. Enfin, en 1989, Erdős et Ivić [1] étudient de nouveau la fonction $d(d(n))$ et montrent que, pour une constante $c > 0$ convenable et n assez grand,

$$d\big(d(n)\big) < \mathrm{e}^{c\sqrt{\log n}\sqrt{(\log\log n)/(\log\log\log n)}}. \tag{1}$$

Notons par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de l'entier n. Dans cette Note, on détermine l'ordre maximum de $\omega(d(n))$, c'est un résultat nouveau (cf. Théorème 2.1, ci-dessous) et on donne une amélioration du résultat (1) d'Erdős et Ivić (cf. Théorème 2.2, ci-dessous). Notre méthode est fondée sur un raffinement de la méthode d'Erdős et Kátai [2] combiné à une bonne majoration de $d(n)$ en termes de $\omega(n)$. L'étude du cas général est nettement plus compliquée. Elle est l'objet d'un autre article [6] dans lequel nous avons amélioré le résultat d'Erdős et Kátai.

2. Les résultats

Théorème 2.1. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement. On a*

$$\omega\big(d(n)\big) \leqslant (1+\epsilon)3\sqrt{192}\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}$$

pour n suffisamment grand et il existe une infinité d'entiers n tels que

$$\omega\big(d(n)\big) \geqslant (1-\epsilon)\,\frac{\sqrt{\log n}}{\log\log n}.$$

Théorème 2.2. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement. On a*

$$d\big(d(n)\big) \leqslant 3\,\mathrm{e}^{(1+\epsilon)\,3\sqrt{192}\,\sqrt{\log n}}$$

pour n suffisamment grand, et il existe une infinité d'entiers n tels que

$$d\big(d(n)\big) \geqslant \mathrm{e}^{(1-\epsilon)\,\log 2\sqrt{\log n}/(\log\log n)}.$$

Le Théorème 2.2 est une conséquence du Théorème 2.1 : la première inégalité se déduit en utilisant le Lemme 3.3 ci dessous et la deuxième inégalité en utilisant la relation $d(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$.

3. Les lemmes

Lemme 3.1. *Soit $\epsilon > 0$ et N_1 un entier naturel. Posons $S_1 = \omega(N_1)$. Pour S_1 assez grand, N_1 possède au moins $[S_1/2]$ diviseurs premiers supérieurs à $(1/2)(1 - \epsilon)S_1 \log S_1$.*

Démonstration. Ecrivons $N_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{[S_1/2]}^{\alpha_{[S_1/2]}} \cdots p_{S_1}^{\alpha_{S_1}}$, $(S_1 = \omega(N_1),\ \alpha_i \geqslant 1)$ la décomposition de N_1 en produits de facteurs premiers avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_{S_1}$. Les facteurs premiers de N_1 suivants $p_{[S_1/2]} < p_{[S_1/2]+1} < \cdots < p_{S_1}$ sont en nombre supérieur à $S_1 - [S_1/2] \geqslant S_1/2 \geqslant [S_1/2]$ et $p_{[S_1/2]}$ est supérieur ou égal au $[S_1/2]$-ième nombre premier et donc pour S_1 assez grand, on a $p_{[S_1/2]} \geqslant (1 + 0(1))[S_1/2]\log[S_1/2] = (1 + 0(1))(1/2)S_1 \log S_1 \geqslant (1/2)(1-\epsilon)S_1 \log S_1$. □

Lemme 3.2. *Soit $\epsilon > 0$ et N_1 un entier naturel. Posons $S_1 = \omega(N_1)$. Il existe un entier naturel $M_1 : M_1 | N_1$ et dont la décomposition en facteurs premiers, $M_1 = Q_1^{\gamma_1 - 1} Q_2^{\gamma_2 - 1} \cdots Q_A^{\gamma_A - 1}$, possède, pour S_1 assez grand, les propriétés suivantes : $A \geqslant (1/3)S_1$, $Q_i \geqslant (1/2)(1-\epsilon)S_1 \log S_1$, $\gamma_i \geqslant 2$, pour $i = 1, 2, \ldots, A$.*

Démonstration. C'est une conséquence facile du Lemme 3.1. □

Lemme 3.3. *Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $d(n) \leqslant 3\,\mathrm{e}^{\omega(n) \log\log n}$.*

Démonstration. Ecrivons $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ avec $s := \omega(n) \geqslant 1$, la décomposition de l'entier $n \geqslant 3$ en facteurs premiers et posons $N = p_1 p_2 \cdots p_s$ le noyau de n. L'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique donne $(\log n.N)/s \geqslant ((n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_s+1))^{1/s} \log 2$. Il s'ensuit que $d(n) \leqslant (\log n \cdot N)^s/(s \log 2)^s \leqslant (2/s \log 2)^s\, \mathrm{e}^{s \log\log n} \leqslant 3\,\mathrm{e}^{s \log\log n}$. Enfin, on vérifie que le résultat est vrai pour $n = 2$. □

Lemme 3.4. *Soit $n \geqslant 2$ un entier arbitraire. Posons $N_2 = n$ et $N_1 = d(N_2)$. Notons $S_1 = \omega(N_1)$. Pour S_1 assez grand, on a l'une ou l'autre des assertions suivantes* : (1) $\log N_2 \geqslant \big(S_1(\log S_1)^2\big)^2$; (2) *il existe un entier naturel $M_2 : M_2 | N_2$ et dont la décomposition en facteurs premiers, $M_2 = R_1^{\beta_1 - 1} R_2^{\beta_2 - 1} \cdots R_B^{\beta_B - 1}$, possède, pour S_1 assez grand, les propriétés suivantes $B \geqslant (1/12)S_1$, $R_i \geqslant (1/24)(1-\epsilon)S_1 \log S_1$, $\beta_i \geqslant (1/2)(1-\epsilon)S_1 \log S_1$, pour $i = 1, 2, \ldots, B$.*

Démonstration. Posons $S_2 = \omega(N_2)$ et écrivons la décomposition de N_2 en facteurs premiers : $N_2 = t_1^{\delta_1 - 1} t_2^{\delta_2 - 1} \cdots t_{S_2}^{\delta_{S_2} - 1}$. On applique le Lemme 3.2 à $N_1 = d(N_2)$. Il existe M_1, vérifiant les propriétés du lemme, tel que $M_1 = Q_1^{\gamma_1 - 1} Q_2^{\gamma_1 - 1} \cdots Q_A^{\gamma_A - 1} | N_1 = d(N_2) = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{S_2}$. Maintenant, nous envisageons deux situations. Première situation. Supposons qu'il existe un δ_m qui possède au moins 3 diviseurs premiers, non nécessairement distincts, parmi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_A$. On a, alors,

$$\log N_2 = \sum_{i=1}^{S_2} (\delta_i - 1) \log t_i \geqslant \frac{\log 2}{2} \delta_m \geqslant \frac{\log 2}{16} (1-\epsilon)^3 S_1^3 (\log S_1)^3 \geqslant \big(S_1(\log S_1)^2\big)^2$$

pour S_1 assez grand, Ceci prouve l'assertion (1) du lemme. Deuxième situation. Supposons que les δ_i possèdent moins de 3 diviseurs premiers parmi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_A$. Notons C le nombre des δ_i dont chacun possède au moins un diviseur parmi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_A$. On a, en désignant par $\Omega(M_1)$ le nombre de facteurs premiers de M_1 comptés avec leurs multiplicités,

$$C \geqslant \frac{\Omega(M_1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{A} (\gamma_i - 1) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{A} \gamma_i \geqslant \frac{1}{4} \min_{1 \leqslant i \leqslant A} (\gamma_i)\ A \geqslant \frac{1}{6} S_1.$$

Sans perte de généralité, notons ces $\delta_i : \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_C$ et les facteurs premiers de N_2 correspondants $t_1 < t_2 < \cdots < t_C$. On pose $M_2 = R_1^{\beta_1 - 1} R_2^{\beta_2 - 1} \cdots R_B^{\beta_B - 1}$, avec $B = C - [C/2] \geqslant (1/12)S_1$, et pour chaque $i : 1 \leqslant i \leqslant B$, $\beta_i = \delta_{[C/2]+i} \geqslant (1/2)(1-\epsilon)S_1 \log S_1$, $R_i = t_{[C/2]+i} \geqslant t_{[C/2]+1} \geqslant (1/24)(1-\epsilon)S_1 \log S_1$. Cela prouve l'assertion (2) du lemme et termine la démonstration. $\square$

4. Démonstration du Théorème 2.1

Montrons la première inégalité. On utilisera les notations du Lemme 3.4. On peut supposer dans la suite que $S_1 := \omega(N_1) = \omega(d(N_2)) \geqslant (\log N_2)^{1/3}$ car sinon l'inégalité serait trivialement vérifiée. Si N_2 vérifie l'assertion (1) du Lemme 3.4 alors l'inégalité est immédiate. En effet, on obtient $\omega(d(N_2)) = \omega(N_1) =: S_1 \leqslant (\log N_2)^{1/2}/(\log S_1)^2 \leqslant (3)^2(\log N_2)^{1/2}/(\log\log N_2)^2$. Maintenant, supposons que N_2 vérifie le résultat (2) du Lemme 3.4. On va minorer $\log N_2$. Comme N_2 possède un diviseur M_2 (vérifiant les propriétés du Lemme 3.4) Il s'ensuit que $\log N_2 \geqslant \log M_2$ et pour S_1 assez grand,

$$\log M_2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=[B/2]}^{B} \beta i \log R_i \geqslant \frac{1}{4}(1-\epsilon)S_1 \log S_1 \log R_{[B/2]}\bigl(B - [B/2]\bigr) \geqslant \frac{1}{192}\bigl((1-\epsilon)S_1 \log S_1\bigr)^2.$$

Le résultat s'en déduit. Maintenant, Montrons la deuxième inégalité. Posons $N_1 = 2.3.5 \cdots p_{S_1}$, le produit des S_1 plus petits nombres premiers et $N_2 = 2^{2-1}3^{3-1} \cdots p_{S_1}^{p_{S_1}-1}$, avec $S_2 = \omega(N_2) = S_1 = \omega(N_1) \geqslant 1$. On a clairement $S_1 = \omega(d(N_2))$. Maintenant d'une part, on a pour S_1 assez grand, $\log N_2 \leqslant p_{S_1}(\log 2 + \log 3 + \cdots + \log p_{S_1}) = (1 + \mathrm{o}(1))(p_{S_1})^2 \leqslant (1+\epsilon)(S_1 \log S_1)^2$ et d'autre part, $\log N_1 = (1 + \mathrm{o}(1))S_1 \log S_1$ et par suite $\log S_1 = (1 + \mathrm{o}(1)) \log\log N_1$ et enfin $(\log S_1)^2 = (1 + \mathrm{o}(1))(\log\log N_1)^2 \leqslant (1+\epsilon)\,(\log\log N_1)^2 \leqslant (1+\epsilon)(\log\log N_2)^2$. Finalement, on obtient $\log N_2 \leqslant ((1+\epsilon)S_1 \log\log N_2)^2$ et l'inégalité en découle.

Références

[1] P. Erdős, A. Ivić, On the iterates of the enumerating function of finite abelian groups, Bull. Acad. Serbe Sci. Math. 17 (1989) 13–22.
[2] P. Erdős, I. Kátai, On the growth of $d_k(n)$, Fibonacci Quart. 7 (1969) 267–274.
[3] J.-L. Nicolas, On highly composite numbers, in: G.E. Andrews, et al. (Eds.), Ramanujan Revisited, Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois, 1987, pp. 215–244.
[4] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 14 (1915) 347–409.
[5] S. Ramanujan, Collected Papers, second ed., Chelsea, 1962.
[6] A. Smati, Sur un problème d'Erdős et Kátai, Prépublication.
[7] S. Wigert, Sur l'ordre de grandeur du nombre de diviseurs d'un entier, Ark. Mat. 3 (18) (1907) 1–9.