



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 69–74



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse numérique

# Approximation numérique d'un problème de membrane non linéaire

Nabil Kerdid <sup>a</sup>, Hervé Le Dret <sup>b</sup>, Abdelkader Saïdi <sup>c</sup>

<sup>a</sup> College of Computer Science and Information Systems, Imam University, Riyadh, Saudi Arabia

<sup>b</sup> Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France

<sup>c</sup> Institut de recherche mathématique avancée, université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France

Reçu le 20 octobre 2004 ; accepté le 16 novembre 2004

Disponible sur Internet le 19 décembre 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

---

## Résumé

On étudie numériquement les déformations d'une membrane élastique non linéaire. On considère le modèle de membrane obtenu par Le Dret et Raoult par la méthode de  $\Gamma$ -convergence. Les déformations de la membrane minimisent une énergie non quadratique. On effectue une approximation du modèle par éléments finis conformes et on utilise un algorithme de gradient conjugué non linéaire pour minimiser l'énergie discrétisée. **Pour citer cet article :** N. Kerdid et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Numerical approximation for a nonlinear membrane problem.** We study numerically the deformations of a nonlinearly elastic membrane. We consider the nonlinear membrane model obtained by Le Dret and Raoult using  $\Gamma$ -convergence. In this model, membrane deformations minimize a highly nonquadratic energy. We consider a conforming finite element approximation of the problem and use a nonlinear conjugate gradient algorithm to minimize the discrete energy. **To cite this article:** N. Kerdid et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

Adresses e-mail : [nkerdid@imamu.edu.sa](mailto:nkerdid@imamu.edu.sa), [kerdid@ann.jussieu.fr](mailto:kerdid@ann.jussieu.fr) (N. Kerdid), [ledret@ccr.jussieu.fr](mailto:ledret@ccr.jussieu.fr) (H. Le Dret), [saidi@math.u-strasbg.fr](mailto:saidi@math.u-strasbg.fr) (A. Saïdi).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crma.2004.11.016

## Abridged English version

### The continuous problem

We consider a nonlinearly elastic membrane with midsurface  $\omega$ , where  $\omega$  is an open, bounded subset of  $\mathbb{R}^2$  with Lipschitz boundary.

We assume that the membrane is made of a bulk material that is homogeneous and hyperelastic, with stored energy function  $W : M_3 \rightarrow \mathbb{R}$  where  $M_3$  is the space of real  $3 \times 3$  matrices. The function  $W$  is assumed to be continuous and coercive. Let  $M_{3,2}$  be the space of real  $3 \times 2$  matrices. If  $z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , are two vectors in  $\mathbb{R}^3$ , we note  $(z_1|z_2)$  the  $3 \times 2$  matrix whose columns are  $z_\alpha$ . For all  $F = (z_1|z_2) \in M_{3,2}$  and  $z \in \mathbb{R}^3$ , we note  $(F|z)$  the  $3 \times 3$  matrix whose first two columns are  $z_\alpha$  and third column is  $z$ .

We define a function  $W_0 : M_{3,2} \rightarrow \mathbb{R}$  by  $W_0((z_1|z_2)) = \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W((z_1|z_2|z))$ , see [3]. The function  $W_0$  is continuous and coercive. We denote by  $QW_0$  its quasiconvex envelope. We introduce the space of admissible membrane displacements,

$$\Phi_M = \{ \psi \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3); \psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)^T \text{ on } \partial\omega \}. \quad (1)$$

We define the nonlinear membrane energy for all  $\psi \in \Phi_M$  by

$$J(\psi) = 2 \int_{\omega} QW_0(\nabla\psi) \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\omega} f \cdot \psi \, dx_1 \, dx_2, \quad (2)$$

where  $f$  denotes a given force resultant density.

In [3], Le Dret and Raoult computed the  $\Gamma$ -limit of the three-dimensional energy when the thickness of the membrane goes to zero, thereby showing that the deformations that minimize the energy of the three-dimensional problem converge, in an appropriate sense, toward solutions of the following two-dimensional minimization problem: Find  $\phi \in \Phi_M$  such that

$$J(\phi) = \inf_{\psi \in \Phi_M} J(\psi). \quad (3)$$

The energy density  $QW_0$  is quasiconvex and existence of a solution to problem (3) is guaranteed under reasonable technical assumptions, see [3].

In the case of a Saint Venant–Kirchhoff material, the limit membrane stored energy function can be computed explicitly (see [3]) as function of the right singular values  $v_1 \leq v_2$  of  $F \in M_{3,2}$ . It turns out to be equal to the convex envelope of the function  $W_0$  in this particular case. The goal of this Note is to present a numerical method to approximate the solutions of the minimization problem.

### The discrete problem

Let  $\tau_h$  be a regular affine family of triangulations covering the (polygonal) domain  $\omega$ . We discretize the three Cartesian components of the deformation using  $P_1$  finite elements. The discrete space of admissible displacements is given by

$$\Phi_M^h = \{ \psi_h \in C^0(\omega; \mathbb{R}^3), \psi_h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)^T \text{ on } \partial\omega, \psi_h|_K \in (P_1)^3; \forall K \in \tau_h \}. \quad (4)$$

Clearly,  $\Phi_M^h \subset \Phi_M$ , and the approximation is conforming.

To numerically minimize  $J$  over  $\Phi_M^h$ , we use the nonlinear conjugate gradient method. We choose the Polak and Ribière [5] variant thereof, which gives good results.

We proceed as follows to compute  $\nabla J$ . Let  $(\lambda_j)_{j=1, \dots, N_h}$  be the components of  $\psi_h$  in the shape function basis  $(\Theta_j)_{j=1, \dots, N_h}$ . We have:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_j}(\psi_h) = \int_{\omega} \frac{\partial(QW_0)}{\partial F}(\nabla\psi_h) : \nabla\Theta_j \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\omega} f \cdot \Theta_j \, dx_1 \, dx_2. \quad (5)$$

The difficulty here is to derive the expression of the  $3 \times 2$  matrix  $\frac{\partial(QW_0)}{\partial F}(\nabla\psi_h)$ . It is constant on each triangle, depends on the singular values of the local deformation gradients and on some rotation matrices.

### 1. Le problème continu

Dans cette Note, nous nous proposons de mettre en œuvre une méthode numérique pour calculer les états d'équilibre d'une membrane bidimensionnelle hyperélastique. Les détails seront publiés dans [2].

On considère une membrane de surface moyenne  $\omega$  dans son état de référence, où  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière lipschitzienne, fixée sur une partie ouverte  $\gamma$  de son bord  $\partial\omega$ .

On suppose que la membrane est formée d'un matériau hyperélastique homogène, dont la densité d'énergie élastique est donnée par une fonction  $W : M_3 \rightarrow \mathbb{R}$  continue et coercive, où  $M_3$  est l'espace des matrices réelles à trois lignes et trois colonnes. Soit  $M_{3,2}$  l'espace des matrices réelles à trois lignes et deux colonnes. Si  $z_\alpha, \alpha = 1, 2$ , sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $(z_1|z_2)$  la matrice de  $M_{3,2}$  dont les  $z_\alpha$  sont les vecteurs colonnes. Pour toute matrice  $F \in M_{3,2}$  et tout  $z \in \mathbb{R}^3$ , on note  $(F|z)$  la matrice dont les deux premières colonnes sont les  $z_\alpha$ , et dont la troisième colonne est  $z$ .

On définit (voir [3]) la fonction  $W_0 : M_{3,2} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$W_0((z_1|z_2)) = \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W((z_1|z_2|z)). \tag{6}$$

La fonction  $W_0$  est continue et coercive. On note  $QW_0$  son enveloppe quasiconvexe. On introduit l'espace des déformations membranaires,

$$\Phi_M = \{ \psi \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3); \psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)^T \text{ sur } \gamma \}. \tag{7}$$

Étant donnée une densité de forces  $f$  sur  $\omega$ , on définit l'énergie de membrane non linéaire pour tout  $\psi \in \Phi_M$  par

$$J(\psi) = 2 \int_{\omega} QW_0(\nabla\psi) \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\omega} f \cdot \psi \, dx_1 \, dx_2. \tag{8}$$

Dans [3], Le Dret et Raoult ont montré, en calculant la  $\Gamma$ -limite des énergies tridimensionnelles quand l'épaisseur de la membrane tend vers zéro, que les déformations tridimensionnelles convergent en un sens approprié vers les solutions du problème de minimisation bidimensionnel : trouver  $\phi \in \Phi_M$  tel que

$$J(\phi) = \inf_{\psi \in \Phi_M} J(\psi). \tag{9}$$

L'énergie  $J(\psi)$  correspond à une intégrande quasiconvexe, coercive et satisfaisant des conditions de croissance, ce qui implique l'existence d'une solution au problème de minimisation (9), voir [3].

Pour un matériau de Saint Venant–Kirchhoff, cas dans lequel on se placera dans la suite, la densité d'énergie membranaire peut être calculée explicitement en fonction des valeurs singulières à droite  $0 \leq v_1 \leq v_2$  de  $\nabla\psi$  (c'est-à-dire les valeurs propres de  $\sqrt{\nabla\psi^T \nabla\psi}$ ), voir [3]. On obtient

$$\begin{aligned} QW_0(\nabla\psi) = \Phi(v_1, v_2) &= \frac{E}{8}([v_2^2 - 1]_+)^2 + \frac{E}{8(1 - v_2^2)}([v_1^2 + v_2^2 - (1 + v)]_+)^2 \\ &+ \frac{E}{8(1 - v_2^2)(1 - 2v)}([v(v_1^2 + v_2^2) - (1 + v)]_+)^2, \end{aligned} \tag{10}$$

où  $[x]_+^2 = x^2$  si  $x \geq 0$ ,  $[x]_+^2 = 0$  si  $x \leq 0$ ,  $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$  est le module d'Young et  $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$  est le coefficient de Poisson du matériau considéré. Cette enveloppe quasiconvexe se trouve être égale à l'enveloppe convexe de la fonction  $W_0$ .

## 2. Le problème approché

On suppose maintenant que  $\omega$  est polygonal. Soit  $\tau_h$  une famille de triangulations, régulière et affine qui couvre le domaine  $\omega$ . On discrétise les trois composantes cartésiennes de la déformation à l'aide d'éléments finis  $P_1$ . L'espace des déplacements admissibles approchés est donc défini par

$$\Phi_M^h = \{ \psi_h \in C^0(\omega; \mathbb{R}^3), \psi_h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)^T \text{ sur } \gamma \text{ et } \forall K \in \tau_h, \psi_{h|_K} \in (P_1)^3 \}. \quad (11)$$

Il est clair que  $\Phi_M^h \subset \Phi_M$ . Il s'agit donc d'une approximation conforme.

On considère le problème de minimisation approché : trouver  $\phi_h \in \Phi_M^h$  tel que

$$J(\phi_h) = \inf_{\psi_h \in \Phi_M^h} J(\psi_h). \quad (12)$$

Comme la fonctionnelle  $J$  est coercive, convexe et fortement continue sur  $W^{1,4}$ , on en déduit que les valeurs d'adhérence faibles de  $\phi_h$  lorsque  $h$  tend vers zéro sont des minimiseurs du problème (9). Par contre, comme  $J$  n'est pas strictement convexe, on ne peut pas en déduire la convergence forte en général.

Pour résoudre numériquement le problème (12), on utilise une méthode de gradient conjugué non linéaire. On choisit la variante de Polak et Ribière [5,6] qui donne de bons résultats.

Le calcul de  $\nabla J$  en  $\psi_h$  s'effectue de la façon suivante. Soient  $(\lambda_j)_{j=1, \dots, N_h}$  les composantes de  $\psi_h$  dans la base formée des fonctions de forme  $(\Theta_j)_{j=1, \dots, N_h}$ . On a

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_j}(\psi_h) = \int_{\omega} \frac{\partial(QW_0)}{\partial F}(\nabla \psi_h) : \nabla \Theta_j \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\omega} f \cdot \Theta_j \, dx_1 \, dx_2. \quad (13)$$

On obtient la matrice  $3 \times 2$ ,  $\frac{\partial(QW_0)}{\partial F}(\nabla \psi_h)$ , par la formule

$$\left( \frac{\partial(QW_0)}{\partial F}(\nabla \psi_h) \Big|_0 \right) = R \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi(v_1, v_2) & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 \Phi(v_1, v_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S \quad (14)$$

avec  $(v_1, v_2) = (v_1(\nabla \psi_h), v_2(\nabla \psi_h))$ , où la matrice orthogonale  $S$  diagonalise la matrice  $\begin{pmatrix} \nabla \psi_h^T \nabla \psi_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et la ma-

trice orthogonale  $R$  diagonalise la matrice  $\nabla \psi_h \nabla \psi_h^T$ . Le fait que  $QW_0$  soit différentiable ainsi que la formule de représentation de son gradient découlent de [1], voir [4] pour le cas de l'enveloppe quasiconvexe de l'énergie de Saint Venant–Kirchhoff tridimensionnelle. On remarque que dans le cas  $P_1$ , toutes les quantités qui apparaissent sont constantes dans chaque triangle et sont relativement faciles à évaluer numériquement.

## 3. Quelques tests numériques

Pour les tests numériques, on considère d'abord une membrane circulaire horizontale, constituée d'un matériau de Saint Venant–Kirchhoff avec  $E = 2 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$ ,  $\nu = 0,485$  dans un état naturel dans sa configuration de référence, ce qui correspond à un caoutchouc assez rigide. On exerce une force morte verticale uniforme :  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = -1000$ , la membrane étant d'abord fixée sur tout le bord, puis sur une partie seulement du bord et laissée libre sur le reste (Figs. 2 et 3). Dans le troisième test, on considère une membrane en forme de sixième de disque horizontal fixée en ses trois sommets, le reste du bord étant libre. Cette condition aux limites ne pose aucune difficulté au niveau continu puisque l'on travaille dans  $W^{1,4}$ , espace qui s'injecte continûment dans les fonctions continues sur  $\bar{\omega}$ . On exerce également sur cette membrane une force verticale uniforme (Fig. 5). Dans un quatrième test, on exerce sur la même membrane circulaire que dans les deux premiers tests, fixée sur tout son

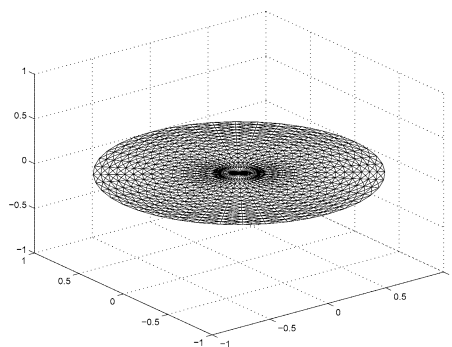


Fig. 1.

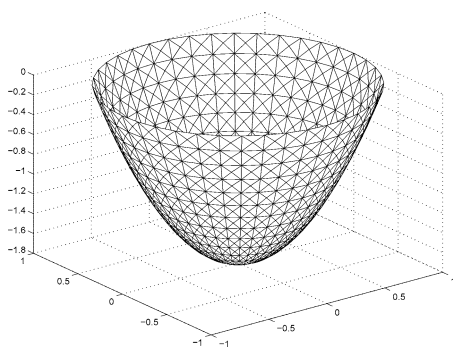


Fig. 2.

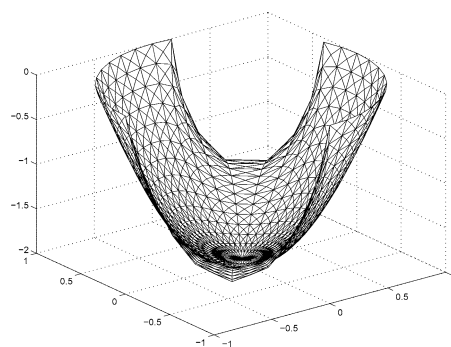


Fig. 3.

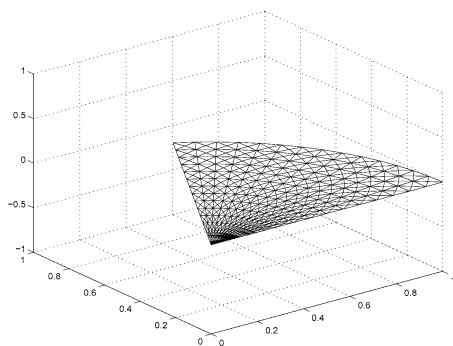


Fig. 4.

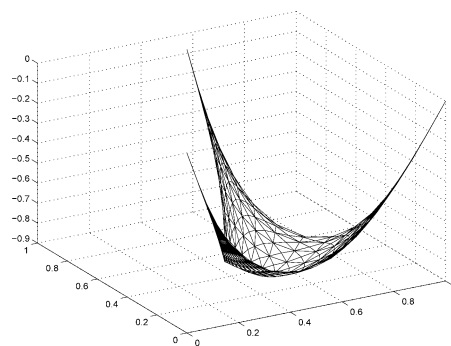


Fig. 5.

bord, une force morte radiale compressive,  $(f_1, f_2)(x) = -10^6(x/\|x\|)$  à laquelle on ajoute une petite composante verticale  $f_3 = -100$  destinée à clarifier la figure en dépliant légèrement la membrane (noter l'échelle verticale, Fig. 6). Enfin, la Fig. 8 représente une membrane rectangulaire horizontale fixée sur un seul côté  $x_1 = 0$  et soumise sur le côté opposé  $x_1 = 2$  à une force horizontale perpendiculaire à ce côté de la forme  $(0, -f_2, 0)$  avec  $f_2 > 0$ , (l'ajout de ce type de force au bord ne pose pas de problème particulier). Le reste du bord est libre et il n'y a pas de force distribuée dans  $\omega$ . Dans chaque cas, on montre d'abord la configuration de référence (Figs. 1, 4 et 7), sauf pour la Fig. 6 dont la configuration de référence est donnée en Fig. 1, puis la ou les configurations déformées.

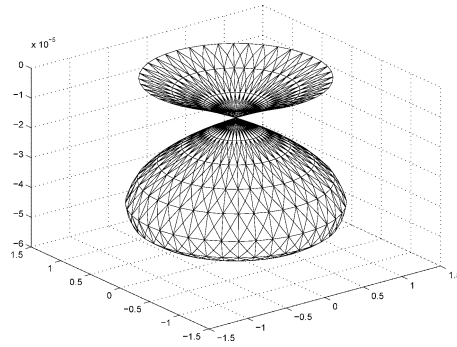


Fig. 6.

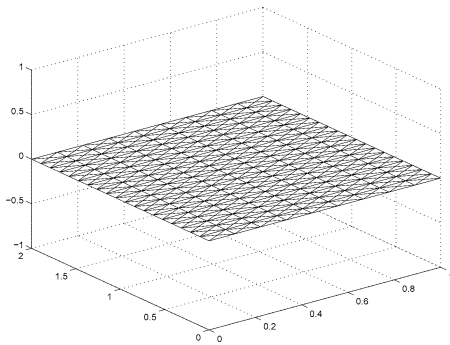


Fig. 7.

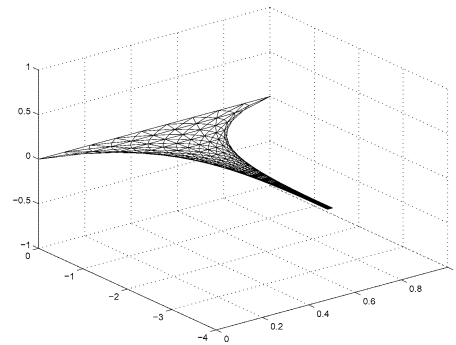


Fig. 8.

Les Figs. 2, 3 et 5 montrent un comportement qualitativement correct. Les essais suivants sont destinés à tester la robustesse du schéma numérique dans des situations où les gradients de déformation peuvent se trouver, au cours des itérations, dans une région où la densité d'énergie n'est pas strictement convexe. Dans le test de la Fig. 6, les forces appliquées radiales ont, au début de l'algorithme, tendance à comprimer la membrane sur elle-même. On constate l'apparition d'une auto-intersection. Ce comportement non physique est en effet autorisé par le modèle continu. L'état final de la membrane est en extension, ce qui est conforme à l'intuition que l'on peut avoir de l'effet de ces forces mortes. On constate donc que l'algorithme de gradient conjugué non linéaire n'est pas sensible à la dégénérescence de l'énergie en compression. Le dernier test est analogue : la membrane initialement placée à gauche de son côté fixé se retourne pour atteindre une position d'équilibre à droite, également en extension.

## Références

- [1] J.M. Ball, Differentiability properties of symmetric and isotropic functions, *Duke Math. J.* 51 (1984) 699–728.
- [2] N. Kerdid, H. Le Dret, A. Saïdi, Numerical approximation for a nonlinear membrane problem, à paraître.
- [3] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of three-dimensional nonlinear elasticity, *J. Math. Pures Appl.* 75 (1995) 551–580.
- [4] H. Le Dret, A. Raoult, The quasiconvex envelope of the Saint Venant–Kirchhoff stored energy function, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 125 (1995) 1179–1192.
- [5] A. Saïdi, Analyse mathématique et numérique de modèles de structures intelligentes et de leur contrôle, thèse de l'Université Paris 6, 1997.
- [6] A. Saïdi, Finite element approximation and optimisation of smart structures, in press.