



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 259–262



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse mathématique

Représentations des algèbres de Jordan, variétés de Stiefel et synthèse spectrale

Antonis G. Kalliterakis

7, avenue Watteau, 94130 Nogent-sur-Marne, France

Reçu le 15 février 2004 ; accepté après révision le 4 janvier 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous montrons que certaines variétés de Stiefel qui apparaissent dans le cadre des représentations des algèbres de Jordan euclidiennes et simples ne sont pas des ensembles de synthèse spectrale en utilisant la fonction de Bessel généralisée qui est associée à la représentation. *Pour citer cet article* : A.G. Kalliterakis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Representations of Jordan algebras, Stiefel manifolds and spectral synthesis. We study the Stiefel's manifolds which arise in the framework of the representations of the Euclidean Jordan and simple algebras. We prove that most of them are not sets of spectral synthesis by using the generalized Bessel functions associated with these representations. *To cite this article*: A.G. Kalliterakis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction et notations

Dans le cadre des représentations régulières des algèbres de Jordan euclidiennes et simples, la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n ($n > 1$) est la variété de Stiefel de la représentation régulière de l'algèbre de Jordan \mathbb{R} sur l'espace \mathbb{R}^n . Dans [5] L. Schwartz a montré que la sphère S^{n-1} de \mathbb{R}^n ($n \geq 3$), n'est pas un ensemble de synthèse spectrale. Nous adaptons la démonstration de [5] en utilisant la fonction de Bessel qui est associée à une représentation d'une algèbre de Jordan (cf. [3]) et ses estimations uniformes et précises (cf. [4]). En particulier nous obtenons que les espaces homogènes $U(m, \mathbb{K})/U(m-r, \mathbb{K})$ (pour $m \geq r \geq 3$) où $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $O(m, \mathbb{R})/O(m-r, \mathbb{R})$ (pour $m \geq r \geq 4$), ne sont pas des ensembles de synthèse spectrale dans $M_{r,m}(\mathbb{K})$.

Adresse e-mail : antonis.kalliterakis@wanadoo.fr (A.G. Kalliterakis).

Plus précisément : soit V une algèbre de Jordan euclidienne simple de rang r , de degré d et dont l'élément neutre est noté e . Soit $\phi : V \rightarrow \mathcal{H}(E)$ une représentation où E est un espace euclidien, et $\mathcal{H}(E)$ l'algèbre de Jordan des endomorphismes symétriques de E . À la représentation ϕ correspond une application quadratique Q à valeurs dans $\overline{\Omega}$ où Ω est le cône symétrique de V . En supposant ϕ régulière (cf. [1]) on peut définir la variété de Stiefel $\Sigma = \{\sigma \in E \mid Q(\sigma) = e\}$ qui est une sous-variété analytique compacte de E . La fonction de Bessel j associée à la représentation ϕ est définie (cf. [3]) comme la transformée de Fourier de la mesure normalisée $d\sigma$ induite sur Σ par la structure euclidienne de E . On a alors $j(\xi) = \int_{\Sigma} \exp(-i\langle \xi, \sigma \rangle_E) d\sigma$. Dans [3] il a été montré que j est radiale et que son profil J s'écrit

$$J(x^2) = \int_{\Sigma} \exp(-i\langle \phi(x)\sigma, \sigma_0 \rangle_E) d\sigma.$$

On montre que J est K -invariante [4, Proposition 1.6] où K est la composante connexe de l'identité du groupe de Lie des automorphismes de V . D'après le Théorème 4.1 [4], il existe une constante $C > 0$ et une fonction K -invariante B sur $\overline{\Omega}$ telles que pour tout $x \in \overline{\Omega}$ $|J(x^2)| \leq CB(x)$.

L'estimation de $J(x^2)$ est optimale, en ce sens que dans chaque direction l'estimation est exactement de l'ordre de grandeur du terme dominant du développement asymptotique de $J(x^2)$. Nous allons exprimer $B(x)$ à l'aide de la décomposition polaire de x . Soit $(c_j)_{1 \leq j \leq r}$ un repère de Jordan fixé. On définit le cône $\overline{\alpha}^+$ par $\overline{\alpha}^+ = \{y = \sum_{j=1}^r \mu_j c_j \mid (\mu_j)_{(1 \leq j \leq r)} \in \mathbb{R}^r, \mu_1 \geq \dots \geq \mu_r \geq 0\}$. Alors $\forall x \in \overline{\Omega}$ on a $x = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$ où $k \in K$. Le r -uplet $(\lambda_j)_{(1 \leq j \leq r)}$ qui vérifie $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$ est unique ([2, p. 103]). Compte tenu de la K -invariance, B s'écrit

$$B(x) = B(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \left(\sum_{\epsilon \in \{-1, 1\}^r} b_{\epsilon}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \right) \prod_{1 \leq i \leq r} (1 + \lambda_i)^{-\delta/2}$$

où $b_{\epsilon}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 + \lambda_i + \epsilon_i \epsilon_j \lambda_j)^{-d/2}$, $\epsilon = (\epsilon_j)_{1 \leq j \leq r}$ et $\delta = N/r - rd + d - 1 \in \mathbb{N}$ $\dim E = N$ (cf. [6]).

2. Synthèse spectrale et variétés de Stiefel

Nous savons [1, Théorème 3] que la représentation d'une algèbre de Jordan V est régulière si et seulement si elle est isomorphe à l'une des suivantes :

- (i) $V = \mathbb{R}$ et ϕ non triviale. Le rang de V est 1 et $d = 0$.
- (ii) $V = \mathbb{R} \oplus W$ où W est un espace euclidien de dimension $q \geq 2$ et $q \neq 2, 3, 5, 9$ et ϕ est l'une quelconque des représentations irréductibles de V [1, Théorème 2], ou $q \geq 2$ et ϕ somme d'au moins deux représentations irréductibles. Le rang de V est 2 et $d = q - 1$.
- (iii) $V = \text{Herm}(r, \mathbb{K})$ où $r \geq 3$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) où \mathbb{H} est le corps des quaternions. $E = M_{r,m}(\mathbb{K})$ avec $m \geq r$ et la représentation ϕ est définie par le produit matriciel. Le rang de V est r et $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.

Lemme 2.1. Soit $\phi : V \rightarrow \mathcal{H}(E)$ une représentation régulière isomorphe à l'une des suivantes : (i) $\text{rg } V = 1$ et $\delta \geq 2$ (ii) $\text{rg } V = 2$ et $\delta \geq 1$ (iii) $\text{rg } V = 3$ et $\delta \geq 1$ (iv) $\text{rg } V \geq 4$. Soient $\xi \in E$ et ses coordonnées $(\xi_i)_{1 \leq i \leq N}$ par rapport à une base orthonormée de E . Alors pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ la fonction $f_i(\xi) = \xi_i j(\xi)$ appartient à $L^{\infty}(E)$.

Démonstration. Soit $\xi = \phi(x)\sigma$. Soit $x = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$ la décomposition polaire de x où $\sum_{j=1}^r \lambda_j c_j \in \overline{\alpha}^+$ c.à.d. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$. Alors nous avons $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $|\xi_i| \leq r^{1/2} \lambda_1$. En effet, $\|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 = \langle \xi, \xi \rangle_E = \langle e, Q(\xi) \rangle_V = \text{tr}(Q(\xi))$ d'où $\|\xi\|^2 = \text{tr}(x^2) = \sum_{j=1}^r \lambda_j^2$, ce qui implique $|\xi_i| \leq r^{1/2} \lambda_1$. Par conséquent $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$|f_i(\xi)| = |\xi_i J(Q(\xi))| \leq Cr^{1/2} \lambda_1 B(\lambda_1, \dots, \lambda_r).$$

La fonction f_i est continue donc pour montrer que $f_i \in L^\infty(E)$, il suffit d'établir que $\lambda_1 B(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est bornée sur $\bar{\alpha}^+$.

(i) Comme $\text{rg } V = 1$ nous avons $B(\lambda_1) = (1 + \lambda_1)^{-\delta/2}$ d' où $|f_i(\xi)| \leq C\lambda_1(1 + \lambda_1)^{-\delta/2}$ mais $\delta \geq 2$, ce qui implique que la fonction $\lambda_1 B(\lambda_1)$ est bornée sur $\bar{\alpha}^+$. Il s'agit du cas examiné dans [5].

(ii) Il est clair que $B(\lambda_1, \lambda_2) \leq 2^2(1 + \lambda_1 - \lambda_2)^{-d/2}(1 + \lambda_1)^{-\delta/2}(1 + \lambda_2)^{-\delta/2}$. Si $C' = 2^{2/5}C$ on a $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$|f_i(\xi)| \leq C'\lambda_1(1 + \lambda_1 - \lambda_2)^{-d/2}(1 + \lambda_1)^{-\delta/2}(1 + \lambda_2)^{-\delta/2}. \quad (*)$$

On distingue deux cas.

Premier cas : si $0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1/2$, on a $(1 + \lambda_1 - \lambda_2)^{-d/2} \leq (1 + \lambda_1/2)^{-d/2}$ et (*) implique que $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$|f_i(\xi)| \leq C'\lambda_1(1 + \lambda_1/2)^{-(d+\delta)/2}.$$

Mais $d \geq 1$ et $\delta \geq 1$, ce qui implique que la fonction $\lambda_1(1 + \lambda_1/2)^{-(d+\delta)}$ est bornée sur $\bar{\alpha}^+$.

Second cas : si $0 \leq \lambda_1/2 \leq \lambda_2$, on a $(1 + \lambda_1/2)^{-\delta/2} \geq (1 + \lambda_2)^{-\delta/2}$ et (*) implique $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$|f_i(\xi)| \leq C'\lambda_1(1 + \lambda_1/2)^{-\delta}.$$

Mais $\delta \geq 1$, ce qui implique que la fonction $\lambda_1(1 + \lambda_1/2)^{-\delta}$ est bornée sur $\bar{\alpha}^+$.

(iii) Il est clair que

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq \left(\sum_{\epsilon \in \{-1, 1\}^3} b_\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right) (1 + \lambda_1)^{-\delta/2}.$$

Comme $\forall \epsilon \in \{-1, 1\}^3 b_\epsilon = b_{-\epsilon}$ on peut supposer que $\epsilon_1 = 1$. On distingue trois cas.

Premier cas : si $\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ et $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$ $b_\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq (1 + \lambda_1 - \lambda_2)^{-d/2}(1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{-d/2}(1 + \lambda_1 - \lambda_3)^{-d/2}$ mais $(1 + \lambda_1 + \lambda_3)(1 + \lambda_2 - \lambda_3) \leq (1 + \lambda_1 - \lambda_3)(1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ car $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$. On en déduit $b_\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq (1 + \lambda_1)^{-d/2}$.

Second cas : si $\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ et $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ alors il est clair qu'on a à nouveau $b_\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq (1 + \lambda_1)^{-d/2}$.

Troisième cas : si $\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ il est clair que $b_\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq (1 + \lambda_1)^{-d/2}$. Par conséquent

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq 2^3(1 + \lambda_1)^{-d/2}(1 + \lambda_1)^{-\delta/2}.$$

Si $C' = 2^3 3^{1/2}C$ on a $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $|f_i(\xi)| \leq C'\lambda_1(1 + \lambda_1)^{-(d+\delta)/2}$ mais $d \geq 1$ et $\delta \geq 1$ ce qui implique que la fonction $\lambda_1(1 + \lambda_1)^{-(d+\delta)/2}$ est bornée sur $\bar{\alpha}^+$.

(iv) Il est clair que $B(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \leq \sum_{\epsilon \in \{-1, 1\}^r} b_\epsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Comme $\forall \epsilon \in \{-1, 1\}^r b_\epsilon = b_{-\epsilon}$ on peut alors supposer $\epsilon_1 = 1$. On distingue trois cas.

Premier cas : si ϵ est tel que $\forall j \in \{2, 3, 4\} \epsilon_j = -1$ alors $\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ et $\epsilon_3\epsilon_4 = 1$. La fonction $b_\epsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ contient le facteur $(1 + \lambda_1 - \lambda_3)^{-d/2}(1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{-d/2}(1 + \lambda_1 - \lambda_4)^{-d/2}(1 + \lambda_3 + \lambda_4)^{-d/2}$.

Puisque $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$ nous avons les inégalités $(1 + \lambda_1 + \lambda_3)(1 + \lambda_2 - \lambda_3) \leq (1 + \lambda_1 - \lambda_3)(1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ et $(1 + \lambda_1 + \lambda_4)(1 + \lambda_3 - \lambda_4) \leq (1 + \lambda_1 - \lambda_4)(1 + \lambda_3 + \lambda_4)$ d'où $b_\epsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \leq (1 + \lambda_1)^{-d}$.

Deuxième cas : si ϵ est tel que $\exists j \in \{2, 3, 4\} \epsilon_j = 1$ et $\forall l \in \{2, 3, 4\} \setminus \{j\} \epsilon_l = -1$. Alors il existe $l, k \in \{2, 3, 4\} \setminus \{j\}$ tels que $l < k$ et $\epsilon_l\epsilon_k = 1$.

La fonction $b_\epsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ contient le facteur $(1 + \lambda_1 + \lambda_j)^{-d/2}(1 + \lambda_1 - \lambda_l)^{-d/2}(1 + \lambda_k + \lambda_l)^{-d/2}$. Puisque $\lambda_1 \geq \lambda_l \geq \lambda_k \geq 0$ nous avons les inégalités $(1 + \lambda_1 + \lambda_l)(1 + \lambda_k - \lambda_l) \leq (1 + \lambda_1 - \lambda_l)(1 + \lambda_k + \lambda_l)$ d'où $b_\epsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \leq (1 + \lambda_1)^{-d}$.

Troisième cas : si ϵ est tel que $\exists j \in \{2, 3, 4\}, \epsilon_j = 1$ et $\exists l \in \{2, 3, 4\} \setminus \{j\}$ tel que $\epsilon_l\epsilon_l = 1$ il est clair que $b_\epsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \leq (1 + \lambda_1)^{-d}$.

Par conséquent $B(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \leq 2^r \lambda_1(1 + \lambda_1)^{-d}$. Si $C' = 2^r r^{1/2}C$ on a $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $|f_i(\xi)| \leq C'\lambda_1(1 + \lambda_1)^{-d}$ mais $d \geq 1$, ce qui implique que la fonction $\lambda_1(1 + \lambda_1)^{-d}$ est bornée sur $\bar{\alpha}^+$. \square

Théorème 2.2. Soit $\phi: V \rightarrow \mathcal{H}(E)$ une représentation régulière qui vérifie les hypothèses du Lemme 1. Alors la variété de Stiefel Σ n'est pas un ensemble de synthèse spectrale dans E .

Démonstration. Nous allons montrer qu'il existe deux idéaux fermés distincts de $L^1(E)$ dont l'enveloppe est Σ . Soit $I_1 = \{h \in L^1(E) \mid \mathcal{F}h \in \mathcal{D}(E) \text{ et telle que } \mathcal{F}h|_{\Sigma} = 0\}$ où \mathcal{D} est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(E)$ à support compact. Soit $I_2 = \{g \in I_1 \mid \text{telle que } \frac{\partial \mathcal{F}g}{\partial \sigma_1}(\sigma)|_{\Sigma} = 0\}$. Il est clair que I_1 et I_2 sont des sous-espaces vectoriels de $L^1(E)$ stables par les translations, et par conséquent \bar{I}_1 et \bar{I}_2 sont des idéaux fermés de $L^1(E)$. Ces deux idéaux ont pour enveloppe Σ , car si $\eta \notin \Sigma$ on peut construire une fonction $h \in \mathcal{D}(E)$ telle que $h(\eta) \neq 0$ mais telle que h et $\frac{\partial h}{\partial \sigma_1}$ soient identiquement nulles sur Σ . Nous allons montrer que $\bar{I}_1 \neq \bar{I}_2$ et pour cela nous considérons la fonction f_1 définie au Lemme 1, qui appartient à $L^\infty(E)$. Alors $\forall h \in I_2, h \in L^1(E)$ et $\mathcal{F}h \in \mathcal{D}(E)$ donc $\xi_1 h(\xi) \in L^1(E)$

$$\langle f_1, h \rangle = \int_E \xi_1 h(\xi) j(\xi) d\xi = \int_E \xi_1 h(\xi) \int_{\Sigma} \exp(-i\langle \xi, \sigma \rangle_E) d\sigma d\xi$$

d'où $\langle f_1, h \rangle = -i \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathcal{F}h}{\partial \sigma_1}(\sigma) d\sigma$ mais $\langle f_1, h \rangle = 0$ et par conséquent f_1 est orthogonale à I_2 . On choisit $h \in I_1$ telle que sa restriction à un voisinage de Σ s'écrive $\mathcal{F}h(\xi) = \xi_1 (\sum_{i=1}^N \xi_i^2 - r)$ où $r = \text{rg } V = \text{tr}(e)$. Alors $\mathcal{F}h$ est identiquement nulle sur Σ , et $\frac{\partial \mathcal{F}h}{\partial \xi_1}(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - r + 2\xi_1^2$ donc $\langle f_1, h \rangle = -2i \int_{\Sigma} \sigma_1^2 d\sigma$ qui est différent de 0. En effet, si $\int_{\Sigma} \sigma_1^2 d\sigma = 0$, chaque composante connexe de Σ est contenue dans un hyperplan affine de E . D'après la remarque de [4, p. 288] ceci est impossible car la représentation ϕ vérifie les hypothèses du Lemme 1. D'où $\langle f_1, h \rangle \neq 0$ donc f_1 n'est pas orthogonale au I_1 et par conséquent Σ n'est pas un ensemble de synthèse spectrale dans E . \square

Remarque 1. Si $\text{rg } V \geq 3$, $V = \text{Herm}(r, \mathbb{K})$ l'espace de représentation est $E = M_{r,m}(\mathbb{K})$ avec $m \geq r$, la variété de Stiefel Σ est l'espace homogène $U(m, \mathbb{K})/U(m-r, \mathbb{K})$ [3]. D'après le Théorème 1, Σ n'est pas un ensemble de synthèse spectrale si $r = 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $r \geq 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Remarque 2. Les théorèmes 2, 3 de [1] nous permettent de déterminer les représentations régulières qui ne satisfont pas aux hypothèses du Lemme 2.1. Elles sont les suivantes :

- (i) si $\text{rg } V = 1$ il y a deux représentations pour $\delta = 0, 1$ qui sont les représentations de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^N où $N = 1, 2$.
- (ii) si $\text{rg } V = 2$ et $\delta = 0$ il y a trois représentations : (a) $q = 2, \dim E = 4$ la représentation est somme directe $\psi = (\psi_i)_{(1 \leq i \leq 2)}$ où ψ_i est la représentation irréductible de $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$ sur l'espace euclidien \mathbb{R}^2 . (b) $q = 4, \dim E = 8$, (c) $q = 8, \dim E = 16$.
- (iii) si $\text{rg } V = 3$ il y a une seule représentation pour $\delta = 0$, la représentation de $\text{Sym}(3, \mathbb{R})$ sur l'espace euclidien $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Les variétés de Stiefel qui échappent du Théorème 2.2, feront l'objet d'une Note ultérieure.

Remerciements

Je remercie le rapporteur pour ses remarques qui ont permis l'amélioration de la présente Note.

Références

- [1] J.-L. Clerc, Représentations d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel, J. Reine Angew. Math. 423 (1992) 47–71.
- [2] J. Faraut, A. Korányi, Analysis on Symmetric Cone, Oxford, 1994.
- [3] J. Faraut, Travaligni G., Bessel functions associated with representations of formally real Jordan algebras, J. Funct. Anal. 71 (1988) 123–141.
- [4] A. Kalliterakis, Estimations à l'infini des fonctions de Bessel associées à une représentation d'une algèbre de Jordan, J. Lie Theory 11 (2) (2001) 273–303.
- [5] L. Schwartz, Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C. R. Acad. Sci. Paris 227 (1948) 424–426.
- [6] G. Travaligni, Representations of Jordan algebras and special functions, Colloquium Math. 62 (1991) 259–266.