



Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 291–294



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Systemes dynamiques/Analyse complexe

Modèle topologique pour des applications de Hénon complexes

Sylvain Bonnot

Malott Hall, Cornell University, Ithaca NY, 14853-4201, USA

Reçu le 24 novembre 2004 ; accepté le 5 janvier 2005

Disponible sur Internet le 25 janvier 2005

Présenté par Adrien Douady

Résumé

Nous contruisons un modèle simple (g, Y) dans lequel Y est le complément dans \mathbb{R}^4 d'un cône au-dessus d'un solénoïde vivant dans la sphère unité S^3 , tandis que l'application g s'exprime en coordonnées « sphériques » par $g(r, \theta) = (r^2, \sigma(\theta))$, où σ est une application solénoïdale de degré deux. Nous montrons alors que pour tout polynôme complexe $P_c : z \mapsto z^2 + c$ ayant un point fixe attractif il existe un $\epsilon > 0$ pour lequel toutes les applications de Hénon complexes $H_{a,c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P_c(x) - ay \\ x \end{pmatrix}$ vérifiant $0 < |a| < \epsilon$ sont topologiquement conjuguées au modèle (g, Y) . **Pour citer cet article : S. Bonnot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).**

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A topological model for a class of complex Hénon mappings. In order to describe the dynamics of the complex Hénon map $H_{a,c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P_c(x) - ay \\ x \end{pmatrix}$, where $P_c : z \mapsto z^2 + c$ has an attractive fixed point, we build a topological model (g, Y) . In this model Y is the complement in \mathbb{R}^4 of a cone over a solenoid lying in the unit 3-sphere, and $g : Y \rightarrow Y$ is a map given in spherical coordinates by $g(r, \theta) = (r^2, \sigma(\theta))$, where σ is a solenoidal map of degree two. Then we prove the existence of a constant $\epsilon > 0$ such that any Hénon map $H_{a,c}$ with $0 < |a| < \epsilon$ is conjugate to our model (g, Y) . **To cite this article: S. Bonnot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).**

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : sylvain.bonnot97@polytechnique.org (S. Bonnot).

1631-073X/\$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.01.003

1. Quelques rappels de dynamique holomorphe à plusieurs variables

1.1. Application de Hénon complexe

L'application de Hénon complexe $H_{a,c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{pmatrix}$ est un biholomorphisme de \mathbb{C}^2 dans lui-même, de jacobien a . L'itération de cette application crée naturellement les ensembles invariants suivants :

$$K^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left\| \left\| H_{a,c}^{on} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne tend pas vers } +\infty \right\},$$

et également $U^+ = \mathbb{C}^2 - K^+$, ainsi que $J^+ = \partial K^+$.

1.2. Aspect perturbatif

Lorsque $|a|$ est proche de zéro, $H_{a,c}$ apparaît comme une petite perturbation du polynôme quadratique $P_c : z \mapsto z^2 + c$. De fait, quand le paramètre c est dans la grande cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot, P_c possède un point fixe attractif qui persiste pour des applications $H_{a,c}$ avec un jacobien a assez petit. Le bassin d'attraction de ce point fixe p , noté $W^s(p)$, est un domaine de Fatou–Bieberbach, biholomorphe à \mathbb{C}^2 tout entier. Fornæss et Sibony [2] ont montré que l'on dispose alors d'une partition

$$\mathbb{C}^2 = W^s(p) \cup J^+ \cup U^+.$$

Toujours dans le cas d'une petite perturbation d'un polynôme avec un point fixe attractif, Hubbard et Oberste-Vorth [5] montrent que J^+ est une variété topologique homéomorphe à une 3-sphère privée d'un solénoïde.

2. Description du modèle

2.1. Applications solénoïdales de degré deux

Dans le tore plein $\mathbf{T} = S^1 \times D$, où D est le disque unité fermé, on considère l'application solénoïdale $\sigma : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ définie par

$$\sigma : (\zeta, z) \mapsto \left(\zeta^2, \frac{1}{2}\zeta + \alpha \frac{z}{\zeta} \right),$$

où α est choisi assez petit, de sorte que l'application soit injective. Elle envoie le tore plein dans un tore plein plus fin qui fait deux tours dans le précédent. Dans Hubbard et Oberste-Vorth [4], il est prouvé que σ s'étend en un homéomorphisme $\tilde{\sigma} : S^3 \rightarrow S^3$, et que de plus, si l'on note $T^- = S^3 \setminus \mathring{\mathbf{T}}$, alors $\tilde{\sigma}^{-1} : T^- \rightarrow T^-$ est conjuguée à σ . On appelle alors $\Sigma^+ = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^n(\mathbf{T})$ et $\Sigma^- = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{\sigma}^{-n}(T^-)$ les deux solénoïdes invariants obtenus par itération en avant et en arrière.

2.2. Modèle topologique

On munit \mathbb{R}^4 de ses coordonnées polaires (r, θ) où $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in S^3$, et on considère l'application $g : (r, \theta) \mapsto (r^2, \sigma(\theta))$.

De plus on définit $\text{cône}(\Sigma^-) = \{(r, \theta) \mid r \geq 1, \theta \in \Sigma^-\}$. Si l'on note $Y = \mathbb{R}^4 - \text{cône}(\Sigma^-)$, on remarque que g préserve Y et que sa restriction à Y est un homéomorphisme. On appelle *modèle de l'application de Hénon* le couple (g, Y) .

3. Théorème de conjugaison

Notre théorème central est le suivant :

Théorème 3.1. *Pour tout c dans la cardioïde \mathcal{C} de l'ensemble de Mandelbrot, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < |a| < \epsilon$, alors il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow Y$ qui conjugue $H_{a,c}$ à $g : Y \rightarrow Y$.*

3.1. Structure de la preuve

On utilise comme pivot central le théorème obtenu par Hubbard et Oberste-Vorth dans [5] et qui montre que $H_{a,c}$ est conjuguée au modèle dans J^+ . Plus précisément on utilise ce lemme :

Lemme 3.2 (Hubbard, Oberste-Vorth). *Pour tout $c \in \mathcal{C}$ et pour tout $R > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si $0 < |a| < \epsilon$, il existe un homéomorphisme $\Lambda : J^+ \cap \{|y| \leq R\} \rightarrow \mathbf{T}$ qui conjugue $H_{a,c}$ à σ .*

Ensuite, on cherche à étendre cette conjugaison à un voisinage tubulaire W homéomorphe à $\mathbf{T} \times [0, 1]$ qui soit à cheval sur $W^s(p)$ et sur U^+ . Cette étape est nécessaire si l'on veut que les conjugaisons construites dans U^+ et dans $W^s(p)$ se raccordent bien. Elle est de loin la plus difficile car J^+ a une structure très compliquée, « fractale », et est très loin d'être une variété différentiable possédant un fibré normal. La construction du voisinage tubulaire est détaillée plus loin.

Les étapes suivantes sont naturellement dictées par la partition de \mathbb{C}^2 en trois parties.

3.1.1. Coordonnées adaptées dans U^+

On remarque tout d'abord que pour r assez grand, on a

$$U^+ = \bigcup_{n \geq 0} H_{a,c}^{\circ-n}(V^+(r)) \quad \text{où } V^+(r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |x| > r, |y| < |x| \right\}.$$

On peut faire en sorte que le bord du voisinage tubulaire W vienne s'appuyer sur $V^+(r)$. Il suffit alors de trouver des coordonnées adaptées dans V^+ , ce qui est facilité par l'existence d'une fonction analytique $\phi^+ : V^+(r) \rightarrow \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle : $\phi^+ \circ H_{a,c} = (\phi^+)^2$ et qui peut s'étendre à $W \cap U^+$.

3.1.2. Coordonnées adaptées dans $W^s(p)$

On s'arrange pour que le voisinage tubulaire W vienne s'appuyer dans $W^s(p)$ sur le bord d'un bidisque \mathcal{B} tel que $H_{a,c}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Puis on montre que $\mathcal{B} - H_{a,c}(\mathcal{B})$ est une « coquille sphérique », homéomorphe à $S^3 \times [0, 1]$. Comme W est muni de coordonnées adaptées, il en va de même pour son image $H_{a,c}(W)$ qui intersecte la coquille sphérique : par conséquent il reste à ajuster la construction pour faire coïncider ces deux systèmes de coordonnées. Pour cela, on démontre que $\mathcal{B} - (H_{a,c}(\mathcal{B}) \cup H_{a,c}(W))$ est homéomorphe à $\mathbf{T} \times [0, 1]$, puis on utilise un théorème de topologie en dimension trois dû à A. Hatcher [3] qui dit que $\text{Homéo}(\mathbf{T}, \text{rel } \partial\mathbf{T})$ a le type d'homotopie d'un point, ce qui nous permet de déformer continûment notre trivialisations afin de l'ajuster.

3.2. Point-clé de la démonstration

Théorème 3.3 (Conjugaison dans le voisinage tubulaire W). *Pour tout $c \in \mathcal{C}$ et pour tout $R > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout a avec $0 < |a| < \epsilon$, il existe un compact W et un homéomorphisme $\Theta : W \rightarrow \mathbb{C}^2$ tels que :*

- (i) $W \cap J^+ = J^+ \cap \{|y| \leq R\}$;
- (ii) $\Theta(W \cap J^+) = \{0\} \times \mathbf{T}$ « Θ redresse J^+ » ;

- (iii) $\Theta(W) = [\frac{1}{2}, 2] \times \mathbf{T} \subset \mathbb{R}^4$ « W est un voisinage tubulaire de $J^+ \cap \{|y| \leq R\}$ » ;
 (iv) Θ conjugue $H_{a,c}$ avec l'application g du modèle.

3.2.1. Trame de la démonstration

Pour c fixé, on considère un anneau $A(c)$ autour de l'ensemble de Julia J_c du polynôme quadratique P_c . On pose alors $\mathcal{U} = A(c) \times D_R$. Dans [2] Fornæss et Sibony démontrent que

$$\mathcal{U}_n = \{(x, y) \in \mathcal{U}; H_{a,c}^{on}(x, y) \in \mathcal{U}\}$$

est une suite d'ensembles homéomorphes au produit *Anneau* \times *Disque* et dont l'intersection est $J_R^+ = J^+ \cap \{|y| < R\}$. Ils montrent également que J_R^+ est feuilleté par des disques analytiques presque verticaux qui sont les graphes de fonctions analytiques $\phi(a, y)$. Grâce à ce feuilletage ils montrent que la tranche horizontale $J^+ \cap \{y = y_0\}$ s'obtient à partir de la tranche $J^+ \cap \{y = 0\}$ par un mouvement holomorphe consistant à glisser le long de ces disques.

A partir de là, on construit notre voisinage tubulaire en deux étapes : on commence par fabriquer les tores pleins $\Theta^{-1}(\{s\} \times \mathbf{T})$, puis on construit les segments radiaux $\Theta^{-1}([\frac{1}{2}, 2] \times \{\theta\})$.

3.2.2. Feuilletage de \mathcal{U} par des tores pleins

Il s'agit de montrer que la réunion $X = J_R^+ \cup \bigcup_{n \geq 0} \partial_{\text{vert}} \mathcal{U}_n$ est faite de disques analytiques presque verticaux, qui permettent d'obtenir $X \cap \{y = y_0\}$ par un mouvement holomorphe à partir de $X \cap \{y = 0\}$. On étend ce mouvement dans la tranche $\mathcal{U} - \mathcal{U}_1$ à l'aide du théorème de Bers–Royden [1]. Puis on itère en arrière cette tranche pour remplir tout \mathcal{U} . A ce stade on a muni \mathcal{U} d'une coordonnée radiale r .

3.2.3. Feuilletage de \mathcal{U} par des segments radiaux

Pour définir la coordonnée angulaire, on utilise à nouveau la théorie des mouvements holomorphes. On remarque que $\mathcal{U} - H_{a,c}(\mathcal{U})$ est un fibré localement trivial, de base l'anneau $A(c)$ et de fibre un disque privé de deux disques. Or le bord horizontal de $\mathcal{U} - H_{a,c}(\mathcal{U})$ est naturellement feuilleté par les anneaux $A(c) \times \{y_0\}$ et leurs images, ce qui permet de définir un autre mouvement holomorphe que l'on peut également étendre. On étend cette coordonnée à tout $\mathcal{U} - \bigcap_{n \geq 0} H_{a,c}^{on}(\mathcal{U})$, puis par continuité à tout \mathcal{U} .

3.3. Remarques et questions ouvertes

La conjugaison obtenue ne peut pas être rendue différentiable, comme on le voit en linéarisant les applications au niveau du point fixe attractif. On peut sans doute améliorer la régularité de la conjugaison, car une grande partie de notre construction est quasi-conforme. Notre démonstration devrait également s'étendre sans trop de difficultés à des applications de Hénon de degré supérieur. Enfin, il serait intéressant d'avoir une idée de la taille de $l' \in$ trouvé.

Remerciements

Je remercie John Hubbard de m'avoir proposé de réfléchir à ce résultat, qu'il avait conjecturé dès 1986 dans [6].

Références

- [1] L. Bers, H.L. Royden, Holomorphic families of injections, *Acta Math.* 157 (1986) 259–286.
- [2] J. Fornæss, N. Sibony, Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou–Bieberbach domains, *Duke Math. J.* 65 (1992) 345–380.
- [3] A. Hatcher, A proof of the Smale conjecture, *Ann. of Math.* 117 (1983) 553–607.
- [4] J.H. Hubbard, R.W. Oberste-Vorth, Hénon mappings in the complex domain I: the global topology of dynamical space, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 79 (1994) 5–46.
- [5] J.H. Hubbard, R.W. Oberste-Vorth, Hénon mappings in the complex domain II: projective and inductive limits of polynomials, in: *Real and Complex Dynamical Systems* (Hillerød, 1993), in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 464, Kluwer Academic, Dordrecht, 1995, pp. 89–132.
- [6] J.H. Hubbard, The Hénon mapping in the complex domain, in: *Chaotic Dynamics and Fractals* (Atlanta, GA, 1985), Notes Rep. Math. Sci. Engrg. 2 (1986) 101–111.