Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 427–430

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Dispersion et inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger 1D à coefficients variables

Delphine Salort

Université Paris 6, laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 7 janvier 2005 ; accepté le 3 février 2005

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

On se place dans le cas de la dimension 1, et on étudie les propriétés dispersives de la solution de l'équation de Schrödinger sans passer par une écriture explicite de la solution, on montre une estimation de Strichartz locale pour des métriques $g \in \mathcal{C}_b^2$. Cette méthode permet de retrouver l'estimation de dispersion classique dans le cas à coefficients constants en toute dimension. ***Pour citer cet article : D. Salort, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Dispersion and Strichartz inequalities for the 1D Schrödinger equation with variables coefficients. We study the dispersive properties of the solution to the 1D Schrödinger equation without an explicit formula of the solution, and we prove local Strichartz estimates for metrics $g \in \mathcal{C}_b^2$. In the constant coefficient Schrödinger equation case, this method provides the classical dispersion in all dimension. ***To cite this article: D. Salort, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Les estimations de Strichartz sont fondamentales pour la compréhension de l'équation de Schrödinger non linéaire [6,4,7]. Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de l'équation de Schrödinger à coefficients variables. Staffilani et Tataru ont prouvé dans [9] des estimations de Strichartz pour certaines métriques peu régulières de classe $\mathcal{C}^2$; l'article de Burq, Gérard, et Tzvetkov [2] montre dans un cadre général des inégalités de Strichartz avec perte de dérivée. L'article de Banica [1] traite le cas particulier de la dimension 1 pour certaines fonctions g peu régulières, et donne des contre-exemples en ce qui concerne les phénomènes de dispersion. Dans l'article de Burq

Adresse e-mail : salort@ann.jussieu.fr (D. Salort).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.02.005

et Planchon [3], il est montré que en dimension 1, l'estimation de Strichartz classique est vérifiée globalement pour toute fonctions $g \in BV$. Le but de cette Note est d'étudier les propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger à coefficients variables en dimension un qui est donnée par

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u + \Delta_g u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

avec $\Delta_g = (gu')'$ où la métrique $g \in C_b^2(\mathbb{R})$, est uniformément majorée et minorée. L'idée générale ici va être de montrer une estimation de dispersion en utilisant la commutation d'un champs de vecteurs.

Tout d'abord, on obtient l'estimation de Strichartz locale suivante :

Théorème 1.1. *Soit u la solution de l'équation de Schrödinger* (1). *Alors on a l'estimation de Strichartz suivante pour tout intervalle I de longueur finie*

$$\|u\|_{L^r(I,L_x^q)} \leqslant C(I)\|u_0\|_{L^2}$$

pour tout couple (r,q) vérifiant $\frac{2}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$.

De plus, on obtient l'estimation de dispersion suivante :

Théorème 1.2. *Soit u la solution de l'équation de Schrödinger* (1). *Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \{1,2\}$ on ait*

$$\left|g^{(k)}(x)\right| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^{k/4+\epsilon}},$$

alors on a l'estimation de dispersion suivante

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant Ct^{-1/2}\|u_0\|_{L^1} + t^{1/2}\|u_0\|_{L^2}.$$

2. Estimation de dispersion en dimension 1 dans le cas à coefficients variables et estimation de Strichartz

2.1. Inégalité de Sobolev Klainerman via l'opérateur Z_g

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $Z_{g,\alpha}$ l'opérateur donné par $Z_{g,\alpha} := -2t(g^{1/2}\cdot)' + \mathrm{i}\phi - \mathrm{i}\alpha$ avec $\phi(x) := \int_0^x g^{-1/2}(y)\,\mathrm{d}y$.

Proposition 2.1. *Soit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, un opérateur $u(t): L^2 \mapsto L^2$ tel que pour $n \in \{0,2\}$ on ait*

$$\left\|Z_{g,\alpha}^n u(t)\right\|_{L^2} \lesssim \left\|Z_{g,\alpha}^n(0)u(0)\right\|_{L^2},$$

alors, on a l'estimation suivante

$$\left\|u(t)\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{1/2}}\left\|Z_{g,\alpha}^2(0)u(0)\right\|_{L^2}^{1/4}\|u_0\|_{L^2}^{3/4}.$$

On peut supposer que $\alpha = 0$; le cas $\alpha \neq 0$ se traitant de manière analogue. Posons $Z_{g,0} := Z_g$.

L'idée de la preuve est de décomposer l'espace des phases en deux zones déterminées par la valeur de la fonction $\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2} - 2t\xi$. Pour cela, on décompose u dans l'espace des phases de la façon suivante :

$$u(t,x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\phi(x)-y,\xi\rangle} u\bigl(t,\phi^{-1}(y)\bigr)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

En faisant le changement de variables $z = \phi^{-1}(y)$, on obtient que

$$u(t,x)g^{1/2}(x) = \int e^{i\langle \phi(x)-\phi(y),\xi\rangle} u(t,y)\,dy\,d\xi.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que $\varphi = 1$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

On écrit $ug^{1/2} = u_1 + u_2$ avec

$$u_1 = \int e^{i\langle \phi(x)-\phi(y),\xi\rangle} \varphi\left(b\left(\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2} - 2t\xi\right)\right) u(t,y)\,dy\,d\xi.$$

Lemme 2.2. *On a les estimations suivantes*

$$\left\|u_1(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \lesssim (bt)^{-1/2}\|u_0\|_{L^2}, \tag{2}$$

$$\left\|u_2(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \leqslant b^{3/2}t^{-1/2}\left\|Z_g^2 u\right\|_{L^2}. \tag{3}$$

L'estimation (2) s'obtient en utilisant le fait que u_1 est localisé dans une petite bande près du lieu où s'annule $\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2} - 2t\xi$. On a donc de l'intégrabilité en ξ. L'intégrabilité en y se démontre en faisant des intégrations par parties avec l'opérateur $\mathcal{A}_b$ défini par

$$\mathcal{A}_b = \frac{1 + (bt)^{-2}\Delta_\xi}{1 + (|\phi(x)-\phi(y)|/(bt))^2}.$$

La fonction u_2 est localisée dans une zone où $\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2} - 2t\xi$ est grand. Dans cette zone, Z_g est elliptique dans le sens où l'intégrabilité en ξ se fait par l'intermédiaire de l'opérateur Z_g en faisant des intégrations par parties avec l'opérateur $\mathcal{B}_b$ défini par

$$\mathcal{B}_b = b\left(2tg^{1/2}\partial_y + i\phi(y) + \frac{1}{2}\partial_\xi\right).$$

L'intégrabilité en y se fait avec l'opérateur $\mathcal{A}_b$. En optimisant le choix de b avec $b = (\|u_0\|_{L^2}/\|Z_g^2 u_0\|_{L^2})^{1/2}$, on obtient que

$$\left\|u(t)\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{1/2}}\left\|Z_{g,\alpha}^2(0)u(0)\right\|_{L^2}^{1/4}\|u_0\|_{L^2}^{3/4}.$$

2.2. Estimations de dispersion pour la solution de l'équation de Schrödinger

L'équation qui commute avec $Z_{g,\alpha}$ est donnée par

$$\begin{cases} i\partial_t u + B_g u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

avec $B_g u := A_g u + c(x)u$, où A_g est l'opérateur de Laplace Beltrami défini par $A_g u = gu'' + \frac{3}{2}g'u'$ et avec $c(x) = \frac{g''}{2}$.

L'idée pour étudier la solution de l'équation de Schrödinger à coefficients variables (1), va être de montrer une estimation de dispersion pour la solution de l'Éq. (4), puis d'établir un lien entre les Éqs. (1) et (4).

2.2.1. Dispersion pour la solution de l'Éq. (4)

Proposition 2.3. *Soit u la solution de l'Éq.* (4)*, alors u vérifie l'estimation de dispersion suivante* :

$$\left\|u(t)\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{1/2}}\|u_0\|_{L^1}. \tag{5}$$

Démonstration. Pour obtenir l'estimation (5), l'idée est de contrôler les moments de u_0 en faisant un découpage en espace, et en utilisant l'injection de Sobolev $L^2 \hookrightarrow W^{1,1}$. Ceci permet d'avoir l'estimation de dispersion suivante

$$\left\|u(t)\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{1/2}}\|u_0\|_{W^{1,1}}.$$

On obtient en utilisant les inégalités de Bernstein [5] l'estimation de dispersion voulue dans le cas où $\operatorname{supp}\widehat{u_0} \subset B(0,1)$. L'estimation de dispersion étant de plus globale en temps, on obtient via un argument d'échelle que pour toute donnée initiale u_0 on a

$$\left\|u(t)\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{1/2}}\|u_0\|_{L^1}.$$

2.2.2. Lien entre l'Éq. (4) et l'équation de Schrödinger

Le lien entre l'Éq. (4) et l'équation de Schrödinger se fait en remarquant que si u est solution de l'Éq. (1) alors $w := g^{1/4}u$ est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t w + A_g w + c(x)w = \big(c(x) + b(x)\big)w, \\ w(0,x) = g^{1/4}u_0(x), \end{cases}$$

avec $b(x) = g^{3/4}(g^{1/2})'' + \frac{1}{2}g'(g^{1/4})'g^{-1/4}$, ce qui permet de démontrer le Théorème 1.2.

Le Théorème 1.1 est une conséquence directe du Théorème 1.2 démontré dans [7] page 2.

Remarque 1. Les détails des démonstrations sont donnés dans un article soumis [8].

Références

[1] V. Banica, Dispersion and Strichartz inequalities for Schrödinger equations with singular coefficients, SIAM J. Math. Anal. 35 (4) (2003) 868–883.
[2] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds, a paraître dans Amer. J. Math.
[3] N. Burq, F. Planchon, Smoothing and dispersive estimates for 1D Schrödinger equations with BV coefficients and applications, manuscrit.
[4] T. Cazenave, F.B. Weissler, The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s, Nonlinear Anal. 14 (10) (1990) 807–836.
[5] J.-Y. Chemin, Fluides parfaits incompressibles, Astérisque 230 (1995).
[6] J. Ginibre, G. Velo, Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations, Commun. Math. Phys. 144 (1) (1992) 163–188.
[7] M. Keel, T. Tao, Endpoint Strichartz estimates, Amer. J. Math. 120 (5) (1998) 955–980.
[8] D. Salort, Dispersion and Strichartz inequalities for the one-dimensional Schrödinger equation with variable coefficients, manuscrit.
[9] G. Staffilani, D. Tataru, Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients, Commun. Partial Differential Equations 27 (7–8) (2002) 1337–1372.