Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 453–456
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique

Uniformité en h dans la loi fonctionnelle limite uniforme les accroissements du processus empirique indéxé par des fonctions

Davit Varron

ENSAI, 6, rue Blaise-Pascal, 35170 Bruz, France

Reçu le 15 octobre 2004 ; accepté après révision le 27 janvier 2005

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Soit $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. dont la loi commune sur $\mathbb{R}^d$ admet une densité continue et strictement positive sur un ouvert O de $\mathbb{R}^d$. Soit $H \subset O$ un compact d'intérieur non vide, et soit $\mathcal{G}$ une classe de fonctions réelles boréliennes sur $\mathbb{R}^d$. Pour tous $z \in H$ et pour tout $h > 0$, on définit le processus stochastique indexé par $\mathcal{G}$ suivant :

$$G_n(K,h,z) := \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right)\right), \quad K \in \mathcal{G}.$$

Soient $(\tilde{h}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(h_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites vérifiant les conditions de Csörgő–Révész–Stute, et telles que $h_n < \tilde{h}_n$. Sous les hypothèses proposées par Mason sur la classe $\mathcal{G}$ (voir [Ann. Probab. 32 (2) (2004) 1391]), nous établissons une loi fonctionnelle limite uniforme pour les processus $G_n(\cdot,h,z)$, $z \in H$, qui a lieu uniformément en $h_n \leqslant h \leqslant \tilde{h}_n$. Ce résultat complète celui obtenu par Einmahl et Mason (preprint, 2003). ***Pour citer cet article : D. Varron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Uniformity in *h* in the functional limit law for the increments of the empirical process indexed by functions. Let $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ be an i.i.d. sequence being such that Z_1 has a continuous, strictly positive density f on an open subset $O \subset \mathbb{R}^d$. Let $H \subset O$ be a compact subset with nonempty interior and let $\mathcal{G}$ be a class of real Borel functions on $\mathbb{R}^d$. For each $z \in H$ and $h > 0$, we set the following $\mathcal{G}$-indexed stochastic process:

$$G_n(K,h,z) := \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right)\right), \quad K \in \mathcal{G}.$$

Let $(\tilde{h}_n)_{n\geqslant 1}$ and $(h_n)_{n\geqslant 1}$ be two sequences fulfilling the Csörgő–Révész–Stute conditions and satisfying $h_n < \tilde{h}_n$. Under some assumptions upon the class $\mathcal{G}$ (see [Ann. Probab. 32 (2) (2004) 1391]), we establish a uniform functional limit law for the

Adresse e-mail : varron@ensai.fr (D. Varron).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.02.009

processes $G_n(\cdot, h, z)$, $z \in H$, which holds uniformly in $h_n \leqslant h \leqslant \tilde{h}_n$. This result is in the same vein as in Einmahl and Mason (preprint, 2003). ***To cite this article: D. Varron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

---

1. Introduction et résultat

Soit $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit $\mathcal{G}$ une classe de fonctions réelles boréliennes sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout $h > 0$, pour tout entier n, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ et pour toute fonction $K \in \mathcal{G}$, on pose

$$G_n(K, h, z) := \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right)\right). \tag{1}$$

Ainsi, $G_n(\cdot, h, z)$ est un processus stochastique indexé par $\mathcal{G}$, pour h, n et z fixés. Notons $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ la classe de fonctions suivante, issue de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} := \bigl\{K\bigl(\lambda(\cdot - z)\bigr),\ z \in \mathbb{R}^d,\ \lambda > 0,\ K \in \mathcal{G}\bigr\}. \tag{2}$$

Nous notons, pour une mesure de probabilité Q et une fonction Q-intégrable g, la quantité $Q(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,\mathrm{d}Q(z)$, et pour $\epsilon > 0$ on pose

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) := \sup_{Q \text{ probabilité}} \min\bigl\{p \geqslant 1,\ \exists (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{F}^p,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \exists 1 \leqslant k \leqslant p,\ Q\bigl(|f - f_k|^2\bigr) \leqslant \epsilon^2\bigr\}.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes sur la classe de fonctions $\mathcal{G}$, hypothèses formulées par Mason [3].

(HK1) $\lim_{\|u\|_{\mathbb{R}^d} \to 0} \sup_{K \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^d} (K(x) - K(x+u))^2\,\mathrm{d}x = 0$, $\lim_{\lambda \to 1} \sup_{K \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^d} (K(\lambda x) - K(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$,
(HK2) $\forall K \in \mathcal{G}$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |K(x)| \leqslant 1$,
(HK3) $\forall K \in \mathcal{G}$, $\forall x \notin [0,1]^d$, $K(x) = 0$,
(HK4) $\exists C_0 > 0$, $v_0 > 0$, $\forall 0 < \epsilon < 2$, $\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) \leqslant C_0 \epsilon^{-v_0}$.

Pour palier le problème de mesurabilité, nous faisons également l'hypothèse usuelle

(HK5) $\mathcal{F}$ est séparable point par point.

Par « séparable point par point » nous entendons qu'il existe un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{G}$ tel que, pour tout $K \in \mathcal{G}$, il existe une suite de $\mathcal{G}_0$ qui converge point par point vers K. On définit $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ comme l'ensemble des fonctions réelles définies et bornées sur la classe $\mathcal{G}$. Pour tout $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, on pose

$$\|\Psi\|_{\mathcal{G}} := \sup_{g \in \mathcal{G}} \bigl|\Psi(g)\bigr|. \tag{3}$$

Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et soit $L^*(\mathcal{G})$ le sous-espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{m})$ engendré par $\mathcal{G}$. On définit l'ensemble $\mathbb{K} \subset \mathcal{B}(\mathcal{G})$ de la façon suivante : $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ est un élément de $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $g \in L^*(\mathcal{G})$ de L^2-norme inférieure à 1 vérifiant, pour tout $g' \in \mathcal{G}$, $\Psi(g') = \int_{\mathbb{R}^d} g g'\,\mathrm{dm}$. Enfin, on dit qu'une suite de constantes $(h_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie les conditions de Csörgő–Révész–Stute lorsque

$$\text{(HV1) } 0 < h_n \leqslant 1,\ h_n \downarrow 0,\ nh_n \uparrow \infty, \quad \text{(HV2) } nh_n/\log n \to \infty, \quad \text{(HV3) } \log(1/h_n)/\log_2 n \to \infty.$$

Nous supposons enfin que les $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ vérifient

(Hf) Z_1 admet une densité f continue et strictement positive sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$.

En nous inspirant directement des travaux de Mason [3], nous établissons le résultat suivant, qui étend le Théorème 1 dans [3].

Théorème 1.1. *Soient* $(h_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(\tilde{h}_n)_{n\geqslant 1}$ *deux suites de réels vérifiant* $h_n < \tilde{h}_n$ *ainsi que* (HV1)–(HV3), *et soit* $\mathcal{G}$ *une classe de fonctions réelles sur* $\mathbb{R}^d$ *vérifiant* (HK1)–(HK5). *Supposons que la loi des* $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ *vérifie* (Hf) *pour un ouvert* O *de* $\mathbb{R}^d$. *Soit* $H \subset O$ *un compact d'intérieur non vide. On a presque sûrement*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \sup_{h_n\leqslant h\leqslant \tilde{h}_n,\, z\in H} \inf_{\Psi\in\mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot,h,z)}{\sqrt{2f(z)nh\log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0,$$

$$\text{(ii)}\ \forall\Psi\in\mathbb{K},\ \lim_{n\to\infty} \sup_{h_n\leqslant h\leqslant \tilde{h}_n} \inf_{z\in H} \left\| \frac{G_n(\cdot,h,z)}{\sqrt{2f(z)nh\log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0.$$

En conséquence, les bandes de confiance « classiques » pour l'estimateur à noyau de la densité (voir par exemple [3]) restent valables uniformément en $h_n \leqslant h \leqslant \tilde{h}_n$. Ceci pourrait conduire à l'obtention de bandes de confiance pour certains types de tailles de fenêtre dépendant des données.

2. Principe de la preuve

Nous donnons les grandes lignes de la preuve du point (i) du théorème annoncé. Soit $\epsilon > 0$ fixé, et soient $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $\lambda > 1$ trois paramètres qui seront ajustés en fonction de ϵ. Posons $n_k := [(1+\gamma)^k]$, $k \geqslant 1$, $[u]$ désignant la partie entière d'un réel u. Posons également, pour tout entier k suffisamment grand, $N_k := \{n_{k-1}+1,\dots,n_k\}$ et $R_k := [\log(\tilde{h}_{n_{k-1}}/h_{n_k})/\log(\lambda)] + 1$. Pour $l = 0,\dots,R_k-1$, on pose $h_{n_k,l} := \lambda^l h_{n_k}$, et on pose $h_{n_k}^{(R_k)} := \tilde{h}_{n_{k-1}}$. Pour tout $l = 0,\dots,R_k-1$, nous recouvrons H en cubes d'arrête $v_{k,l} := (\delta h_{n_k,l})^{1/d}$, notés $\Gamma_{k,l,j} = z_{k,l,j} + [0, v_{k,l}]^d$, $j = 1,\dots,J_l$, vérifiant tous l'inclusion $\Gamma_{k,l,j} \subset O$. Nous faisons de plus en sorte que J_l soit le nombre minimal de cubes nécessaires pour recouvrir H en vérifiant l'inclusion précédente. Pour $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{G})$ et pour $\epsilon > 0$, notons A^ϵ le ϵ-dilaté de A pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ (voir (3)). Nous partons de la décomposition suivante, pour tout entier k suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k &:= \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{h\in[h_{n_k},\tilde{h}_{n_{k-1}}],\, z\in H,\, n\in N_k} \left\{\frac{G_n(\cdot,h,z)}{(2f(z)nh\log(1/h))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{4\epsilon}\right\}\Bigg)\\
&\leqslant \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{0\leqslant l\leqslant R_k,\, 1\leqslant j\leqslant J_l,\, n\in N_k} \left\{\frac{G_n(\cdot,h_{n_k,l},z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k,l}\log(1/h_{n_k,l}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{2\epsilon}\right\}\Bigg)\\
&\quad + \mathbb{P}\Bigg(\max_{n\in N_k,\, 0\leqslant l\leqslant R_k-1,\, 1\leqslant j\leqslant J_l}\ \sup_{h_{n_k,l}\leqslant h\leqslant h_{n_k,l+1},\, z\in\Gamma_{k,l,j}}\\
&\quad \times \left\| \frac{G_n(\cdot,h,z)}{(2f(z)nh\log(1/h))^{1/2}} - \frac{G_n(\cdot,h_{n_k,l},z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k,l}\log(1/h_{n_k,l}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > 2\epsilon\Bigg)\\
&=: \mathbb{P}_{1,k} + \mathbb{P}_{2,k}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Notre but est alors de démontrer que $\mathbb{P}_{1,k}$ et $\mathbb{P}_{2,k}$ sont sommable en k, pour un choix judicieux de $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $\lambda > 1$, en vue d'appliquer le lemme de Borel–Cantelli. Clairement, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}_{1,k} \leqslant \sum_{l=0}^{R_k}\sum_{j=1}^{J_l} \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n\in N_k}\left\{\frac{G_n(\cdot,h_{n_k,l},z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k,l}\log(1/h_{n_k,l}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{2\epsilon}\right\}\Bigg) =: \sum_{l=0}^{R_k}\sum_{j=1}^{J_l} \mathbb{P}_{1,k,l,j}.$$

Puis, nous montrons que la technique proposée par Mason [3] (basée sur [1,4,2,5]) reste valable uniformément en $h_{n_k,l}$ dès lors que h_n vérifie (HV2) et que $\tilde{h}_n$ vérifie (HV1) et (HV3). Ainsi, nous montrons qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tous l, j, on ait $\mathbb{P}_{1,k,l,j} \leqslant {h_{n_k,l}}^{1+\alpha_1}$ ce qui, en sommant en j et en l, montre que $\mathbb{P}_{1,k}$ est sommable en k, d'après (HV2).

Pour contrôler les $\mathbb{P}_{2,k}$, $k \geqslant 1$, nous nous basons essentiellement sur une inégalité concernant le processus empirique indexé par une classe de fonctions. Par des arguments déterministes, nous montrons d'abord que, pour tous $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ suffisamment petits, on a

$$\mathbb{P}_{2,k} \leqslant \sum_{0 \leqslant l \leqslant R_k - 1,\, 1 \leqslant j \leqslant J_l} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{h_{n_k,l} \leqslant h \leqslant h_{n_k,l+1},\, z \in \Gamma_{k,l,j}} \\ \times \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k} \log(1/h_{n_k}))^{1/2}} - \frac{G_n(\cdot, h_{n_k,l}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k,l} \log(1/h_{n_k,l}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \Bigg). \tag{5}$$

Pour contrôler individuellement les termes dans (5), nous considérons les classes de fonctions

$$\mathcal{F}_{k,l,j} := \left\{ f(z)^{-1/2} K\left(\frac{\cdot - z}{h^{1/d}}\right),\ z \in \Gamma_{k,l,j},\ h_{n_k,l} \leqslant h \leqslant \lambda h_{n_k,l} \right\}.$$

D'après (HK2) et (HK4) et (HV3), les classes de fonctions $\mathcal{F}_{k,l,j}$ vérifient des conditions d'entropie suffisamment fortes pour appliquer les résultats de Einmahl et Mason [2,4]. Ainsi, on obtient, pour tout entier k suffisamment grand, uniformément en $l = 0, \ldots, R_k - 1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Bigg(\sup_{h_{n_k,l} \leqslant h \leqslant h_{n_k,l+1},\, z \in \Gamma_{k,l,j}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k} \log(1/h_{n_k}))^{1/2}} - \frac{G_n(\cdot, h_{n_k,l}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k,l} \log(1/h_{n_k,l}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \Bigg) \\ &\quad \leqslant \mathbb{P}\Bigg(\sup_{g \in \mathcal{F}_{k,l,j}} \left| \sum_{i=1}^{n_k} f(Z_i) - \mathbb{E}\big(f(Z_i)\big) \right| > \epsilon \big(n_k h_{n_k,l} \log(1/h_{n_k,l})\big)^{1/2} \Bigg) \\ &\quad \leqslant 4 \exp\left(-A_2 \frac{\epsilon^2 n_k h_{n_k,l} \log(1/h_{n_k,l})}{n_k \sigma_{k,l,j}^2} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

où $A_2 > 0$ est une constante universelle et $\sigma_{k,l,j}^2$ désigne le sup de variances des fonctions de $\mathcal{F}_{k,l,j}$ sous la loi de Z_1. D'après (HK1), on montre qu'il existe une fonction $A(\cdot)$ de limite nulle en 0, telle que, pour tout $\lambda > 1$, et pour tout entier k suffisamment grand on ait, uniformément en l, j, $\sigma_{k,l,j} \leqslant A(\lambda - 1) h_{n_k,l}$. Ainsi, pour un choix judicieux de $\lambda > 1$, asymptotiquement en k et uniformément en l, j, on a

$$4 \exp\left(-A_2 \frac{\epsilon^2 n_k h_{n_k,l} \log(1/h_{n_k,l})}{n_k \sigma_{k,l,j}^2} \right) \leqslant {h_{n_k,l}}^2.$$

En sommant en l, j et d'après (HK3) et (5), il vient que la suite $(\mathbb{P}_{2,k})_{k \geqslant 1}$ est sommable.

Références

[1] M.A. Arcones, The large deviation principle of stochastic processes, Part 1, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 47 (1) (2002) 122–150.

[2] U. Einmahl, D.M. Mason, An empirical process approach to the uniform consistency of kernel type estimators, J. Theoretic. Probab. 13 (2000) 1–13.

[3] D. Mason, A uniform functional law of the iterated logarithm for the local empirical process, Ann. Probab. 32 (2) (2004) 1391–1418.

[4] M. Talagrand, Sharper bounds for Gaussian and empirical processes, Ann. Probab. 22 (1994) 28–76.

[5] A.Yu. Zaitsev, Estimates of the Levy–Prokhorov distance in the multidimensional central limit theorem for random variables with finite exponential moment, Theor. Probab. Appl. 31 (2) (1987) 203–220.