



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 547–550



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Problèmes mathématiques de la mécanique/Équations aux dérivées partielles

Solutions globales d'énergie infinie de l'équation de Navier–Stokes 2D

Pierre Germain

Centre de mathématiques Laurent Schwartz, UMR 7640, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Reçu le 7 janvier 2005 ; accepté le 3 février 2005

Disponible sur Internet le 19 mars 2005

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous étudions dans cette Note les solutions des équations de Navier–Stokes en deux dimensions, avec donnée initiale dans ∂BMO . Pour $u|_{t=0}$ dans l'adhérence de la classe de Schwartz, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution globale, et une estimation sur sa norme dans ∂BMO . *Pour citer cet article : P. Germain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Global solutions of infinite energy for the 2D Navier–Stokes equation. We study in this Note the solutions of the 2D Navier–Stokes equations with initial data in ∂BMO . For $u|_{t=0}$ in the closure of the Schwartz class, we obtain the existence and uniqueness of a global solution, and besides an estimate on its norm in ∂BMO . *To cite this article: P. Germain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction et résultat principal

Nous nous intéresserons dans cette Note aux équations de Navier–Stokes posées dans l'espace entier,

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Deux théories décrivent les solutions de ces équations :

Adresse e-mail : pgermain@math.polytechnique.fr (P. Germain).

- On connaît, pour $u_0 \in L^2$, depuis les travaux de Leray [9] l’existence d’une solution globale en temps, de norme finie dans $L^\infty([0, \infty[, L^2) \cap L^2([0, \infty[, \dot{H}^1)$. En dimension deux d’espace, on sait que cette solution est unique.
- On peut aussi prendre u_0 dans un espace critique. Pour définir un espace critique, remarquons que si u est une solution de (NS) associée à u_0 , alors $\lambda u(\lambda(x - x_0), \lambda^2 t)$ sera associée à $\lambda u_0(\lambda(x - x_0))$ pour $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Un espace X sera dit critique (sous-entendu : pour les conditions initiales de (NS)) s’il respecte cette invariance, autrement dit si sa norme vérifie

$$\forall \lambda > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\|_X = \lambda \|u(\lambda(\cdot - x_0))\|_X.$$

En dimension deux d’espace, on a la chaîne d’inclusions suivante entre espaces critiques :

$$L^2 \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^{2/p-1} \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{2/p-1} \hookrightarrow \partial BMO \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$$

où $p, q \in [2, \infty[$. On note ∂BMO l’espace des fonctions dérivées de fonctions de BMO . Pour une définition des espaces de Besov $\dot{B}_{p,q}^{2/p-1}$ et de BMO , se reporter à [11] et [10]. On note enfin $\partial BMO^{(0)}$ l’adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO .

En dimension d’espace quelconque, des théorèmes garantissent l’existence d’une solution locale u^* pour (NS) si u_0 est de norme grande dans un espace critique X : voir [2] pour $\dot{B}_{p,q}^{2/p-1}$ et [3,8] pour ∂BMO .

Le cas de la dimension deux est particulier puisqu’alors L^2 est lui-même un espace critique, ce qui est faux en dimension supérieure.

En utilisant cette propriété, I. Gallagher et F. Planchon [4] ont pu montrer que, pour une donnée initiale grande dans $\dot{B}_{p,q}^{2/p-1}$, la solution locale en temps u^* se prolonge à \mathbb{R}^+ , et obtenir ainsi une solution globale en temps. Nous allons démontrer un résultat similaire pour ∂BMO .

Notons que ∂BMO est, en un certain sens, l’espace optimal pour la résolution de (NS). En effet, ∂BMO est le plus gros espace critique X , dans la chaîne d’inclusions précédente (qui se généralise à \mathbb{R}^n), pour lequel on sait démontrer un résultat d’existence de solutions de (NS) dans \mathbb{R}^n avec $u_0 \in X$ petit. En fait, on peut formaliser et fonder cette observation, et donner un sens précis à l’idée que ∂BMO est optimal : voir [1].

Nous obtiendrons aussi un résultat d’unicité, dans l’espace \mathcal{E} défini par

$$u \in \mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} \text{(i)} \ u \in C([0, \infty[, \partial BMO) \\ \text{(ii)} \ \forall T \in \mathbb{R}^+, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } u \in L^\infty_{\text{loc}}(]T, T + \epsilon[, L^\infty) \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u(T + \cdot)\|_{\tilde{X}_\delta} \leq \eta \end{cases}$$

où η est une constante strictement positive, et où

$$\|u\|_{C,T} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0 < R < \sqrt{T}} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \frac{1}{R^2} \int_{B(x,R)} |u(y,t)|^2 dy dt, \quad \|u\|_{\tilde{X}_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{C,T} + \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|v(t)\|_\infty.$$

Remarque 1. Notons que la classe d’unicité qui vient d’être définie englobe des résultats déjà connus sur (NS) en deux dimensions, avec u_0 dans ∂BMO ou un sous-espace de ∂BMO : on vérifie en particulier que les solutions construites dans [7,4] et [8] appartiennent à cette classe.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

Théorème 1.1. *Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}(\mathbb{R}^2)$ de divergence nulle. Il existe une solution globale de (NS) à valeurs dans ∂BMO issue de u_0 . Cette solution vérifie, pour une constante $C(\delta)$ dépendant de u_0 et de δ :*

$$\forall t > 0 \quad \|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1 + t^\delta).$$

De plus, cette solution prolonge la solution de Koch et Tataru [8] définie seulement localement et est unique dans la classe \mathcal{E} .

Avant de passer à une esquisse de la démonstration de ces résultats, signalons qu’ils seront l’objet d’un article plus détaillé, [6].

2. Démonstration du Théorème 1.1

2.1. Existence

Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$. Nous allons construire u solution de (NS) ayant u_0 pour donnée initiale. Nous emploierons pour ce faire la méthode utilisée par Gallagher et Planchon [4] dans le cadre des espaces de Besov.

2.1.1. Etape 1

La donnée initiale u_0 s’écrit comme somme de deux éléments de divergence nulle : une partie grande et régulière $v_0 \in \mathcal{S}$, et une partie petite et moins régulière w_0 telle que $\|w_0\|_{\partial BMO} \leq \epsilon$ (nous prenons ϵ assez petit pour que tous les théorèmes dont nous aurons besoin par la suite s’appliquent). De plus, v_0 et w_0 peuvent être choisis de divergence nulle. Le théorème de Koch et Tataru [8] donne l’existence d’une solution w de (NS) issue de w_0 , vérifiant l’estimation pour tout temps $t > 0$

$$\|w(t)\|_{L^\infty} \leq C \frac{\|w_0\|_{\partial BMO}}{\sqrt{t}}.$$

Quant à $v = u - w$, elle est solution de l’équation intégrale suivante (résultant simplement de la formule de Duhamel)

$$v(t) = e^{t\Delta}v_0 - B(v, w)(t) - B(w, v)(t) - B(v, v)(t) \tag{1}$$

où l’on note

$$B(u, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes v(s)) \, ds.$$

2.1.2. Etape 2

On résout (1) par point fixe dans X_T défini comme suit

$$\|v\|_{X_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|v\|_{\tilde{X}_T} + \sup_{0 < t < T} t \|\nabla v(t)\|_\infty.$$

La bicontinuité de $B : X_T \times X_T \rightarrow X_T$ ainsi que la continuité de $B(w, \cdot)$ et de $B(\cdot, w)$ de X_T dans X_T sont prouvées dans [8,3]. On voit de plus facilement que

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{X_T} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

si $v_0 \in \mathcal{S}$. Ces éléments permettent d’appliquer le théorème de point fixe de Picard (voir par exemple [5]), qui donne $v \in X_\tau$ solution de (1) sur $[0, \tau]$ avec $\tau > 0$.

2.1.3. Etape 3

Nous allons maintenant montrer qu’il existe un temps strictement positif pour lequel $v \in L^2$. Soit Y_T l’espace donné par la norme

$$\|f\|_{Y_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|f\|_{L^\infty([0, T], L^2)} + \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\nabla f(t)\|_{L^2}.$$

On peut montrer la proposition suivante :

Proposition 2.1. *L’application B est bicontinue de $X_T \times Y_T \rightarrow Y_T$.*

Cette proposition permet d'employer un argument de propagation de régularité (voir par exemple [5]) et d'obtenir ainsi que $v \in Y_\tau$ avec $\tau > 0$. En particulier $v(\tau) \in L^2$.

2.1.4. Etape 4

Il reste maintenant à prolonger v à tout \mathbb{R}^+ . Ce sera possible grâce à l'estimation a priori ci-dessous, qui s'obtient par une estimation d'énergie classique.

Proposition 2.2. *Soit $v_\tau \in L^2$, et w comme ci-dessus. On considère v solution de*

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=\tau} = v_\tau. \end{cases}$$

On dispose alors de l'estimation a priori suivante sur la norme de v

$$\|v(t)\|_{L^\infty([\tau, t], L^2) \cap L^2([\tau, t], \dot{H}^1)} \leq C \left(\frac{t}{\tau}\right)^{C\epsilon} \|v_\tau\|_{L^2}. \quad (2)$$

On peut maintenant appliquer le schéma standard : régularisation de l'équation (NS) sur $[\tau, +\infty[$, puis passage à la limite faible en utilisant l'estimation précédente. On en déduit que v se prolonge à \mathbb{R}^+ en une solution de (NS) vérifiant (2). En posant $u = v + w$, on obtient une solution globale de (NS) issue de u_0 . Comme $L^2 \hookrightarrow \partial BMO$, et du fait de l'inégalité (2), on dispose de plus de l'estimation

$$\|v(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1 + t^\delta).$$

2.2. Unicité

La proposition contenue dans le Théorème 1.1 relative à l'unicité des solutions dans la classe \mathcal{E} résulte des deux points suivants

- Les solutions u construites par notre méthode appartiennent effectivement à la classe \mathcal{E} .
- Si on se donne u et v égales en $t \geq 0$ et vérifiant la condition (ii) définissant \mathcal{E} , alors elles sont égales dans un voisinage (à droite) de t , grâce à un résultat démontré dans [3].

Références

- [1] P. Auscher, S. Dubois, P. Tchamitchian, On the stability of global solutions to Navier–Stokes equations in the space, *J. Math. Pures Appl.*, à paraître.
- [2] J.Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel, *J. Anal. Math.* 77 (1999) 27–50.
- [3] S. Dubois, Thèse de doctorat : Équations de Navier–Stokes dans l'espace : Espaces critiques et solutions d'énergie finie, Université de Picardie Jules Verne, 2002.
- [4] I. Gallagher, F. Planchon, On global infinite energy solutions to the Navier–Stokes equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 161 (4) (2002) 307–337.
- [5] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, Comportement asymptotique et stabilité des solutions globales des équations de Navier–Stokes, *Ann. Inst. Fourier* 53 (2003) 1387–1424.
- [6] P. Germain, Existence globale de solutions de l'équation de Navier–Stokes 2D avec données initiales dans ∂BMO , en préparation.
- [7] Y. Giga, S. Matsui, O. Sawada, Global existence of two-dimensional Navier–Stokes flow with nondecaying initial velocity, *J. Math. Fluid Mech.* 3 (2001) 302–315.
- [8] H. Koch, D. Tataru, Well-posedness for the Navier–Stokes equations, *Adv. Math.* 157 (2001) 22–35.
- [9] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace, *Acta Math.* 63 (1934) 193–248.
- [10] E. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.
- [11] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, 1992.