

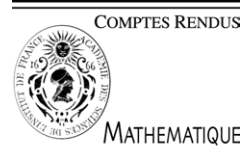


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 513–518



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Systèmes dynamiques/Problèmes mathématiques de la mécanique

Mouvements rigides associés à des masses positives et négatives

Martin Celli^{a,b}

^a *Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides, UMR 8028 du CNRS, observatoire de Paris, 77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France*

^b *Laboratoire analyse, géométrie et applications, UMR 7539 du CNRS, institut Galilée, université Paris 13, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France*

Reçu le 5 janvier 2005 ; accepté le 11 février 2005

Disponible sur Internet le 16 mars 2005

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Cette Note traite des solutions rigides du Problème des N Corps, i.e. des solutions au cours desquelles les distances mutuelles entre les corps sont constantes. On montre qu'au cours de ces mouvements, la configuration est équilibrée au sens d'Albouy et Chenciner [Invent. Math. 131 (1998) 151–184] même lorsque les masses sont de signes distincts. Ce fait n'était alors établi qu'avec des masses positives, en utilisant le produit scalaire défini par les masses. Une conséquence de ce résultat est la constance de la vitesse de rotation. On montre également que toute configuration peut engendrer des mouvements rigides non plans pour certaines masses. De tels mouvements n'existent pas à masses positives. Ces résultats se généralisent à des systèmes de N particules chargées. **Pour citer cet article :** *M. Celli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Rigid motions with positive and negative masses. The Note deals with rigid solutions of the N -Body Problem, i.e. solutions with constant mutual distances between the bodies. It is shown that for these motions, the configuration is balanced in the sense of Albouy and Chenciner [Invent. Math. 131 (1998) 151–184] even when the masses are of different signs. This fact was proved only for positive masses, using the scalar product they define. A consequence of the result is the constancy of the rotation velocity. It is also shown that any configuration can generate non-planar rigid motions for certain masses. Such motions do not exist with positive masses. All the results can be generalized to systems with N charged particles. **To cite this article:** *M. Celli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : celli@imcce.fr (M. Celli).

Abridged English version

Let us consider N bodies whose masses m_1, \dots, m_N are positive or negative real numbers. The position \vec{r}_i of the i th body belongs to a Euclidean space E , which is identified with its dual space E^* . The motion of the bodies is a solution of Newton's equations:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i},$$

where U is the Newtonian potential: $U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j / \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$. A motion is said to be rigid if, and only if, the mutual distances $\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ are constant. A state (positions and velocities) is said to be a relative equilibrium if, and only if, it is an equilibrium of Newton's equations reduced by rotations [1].

Proposition 0.1. *For a rigid motion, the state is a relative equilibrium at any time. For any motion, if at a certain time the state is a relative equilibrium, then the motion is rigid and the rotation is uniform: there exists a constant antisymmetrical endomorphism Ω such that $\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i = \Omega(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ at any time.*

As an example of strange phenomenon that occurs with masses of different signs, let us consider three bodies such that $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| = l_1$ and $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\| = l_2 < l_1$. It can be shown that the motion is rigid and non planar for certain initial velocities if, and only if, we can write: $(m_1, m_2, m_3) = \alpha(1, -2, 1)$ or $(m_1, m_2, m_3) = \alpha(-1/l_1^3, 2/l_2^3, -1/l_1^3)$, with $\alpha > 0$.

The proof of the previous proposition requires equations involving the mutual distances between the bodies. We use the formalism introduced in [1]. The main tool in the proof is the following proposition of linear algebra.

Proposition 0.2. *Let f be an endomorphism of a \mathbb{R} -vector space F of finite dimension, and b be a linear function: $F \rightarrow F^*$. Let us assume that b is symmetrical (${}^t b = b$) and positive (for all u , $\langle b(u), u \rangle \geq 0$). If we denote: $[f, b] = {}^t f \circ b - b \circ f$, the following relations are equivalent: $[f, b] = 0$ and $[f, [f, b]] = 0$.*

The proof happens to be easy when f is diagonalizable, which is trivially true with positive masses. In this case, f is symmetrical for the mass scalar product. When f is not diagonalizable, we have to use the fact that b then has a non trivial kernel.

1. Définitions et notations

On considère un système de N corps dont les masses m_1, \dots, m_N sont des réels non nuls de signe quelconque. La position \vec{r}_i du corps d'indice i est un élément d'un espace euclidien E . Les notations sont celles de [1]. Ainsi, la configuration absolue ou configuration à translation près s'identifie à une application linéaire $x : \mathcal{D}^* \rightarrow E$, où $\mathcal{D}^* = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \xi_1 + \dots + \xi_N = 0\}$. On a :

$$x(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_1 \vec{r}_1 + \dots + \xi_N \vec{r}_N.$$

De même, l'état absolu (positions et vitesses à translation près) s'identifie à une application linéaire $z : 2\mathcal{D}^* \rightarrow E$. On notera parfois : $z = (x, y)$. La configuration relative ou configuration à isométrie près s'identifie à la forme bilinéaire symétrique positive $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$ sur \mathcal{D}^* , où l'isomorphisme $\epsilon : E \rightarrow E^*$ est défini par le produit scalaire de E . De même, l'état relatif \mathcal{E} est défini par : $\mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z$.

Le mouvement des corps est solution des équations de Newton :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = m_i \vec{\gamma}_i,$$

où U est le potentiel newtonien : $U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j / \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$. On définit $\gamma : \mathcal{D}^* \rightarrow E$ par :

$$\gamma(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_1 \vec{\gamma}_1 + \dots + \xi_N \vec{\gamma}_N.$$

Soit $\nu : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}$ l'application linéaire définie par :

$$\langle \nu(\xi_1, \dots, \xi_N), (\xi'_1, \dots, \xi'_N) \rangle = \frac{\xi_1 \xi'_1}{m_1} + \dots + \frac{\xi_N \xi'_N}{m_N}.$$

Le mouvement des corps à translation près est solution du système différentiel : $\epsilon \circ \ddot{x} = dU(x) \circ \nu$. Posons : $M = m_1 + \dots + m_N$. Si $M = 0$, $\text{Ker } \nu = \text{vect}\{m_1, \dots, m_N\}$. Si $M \neq 0$, ν est une bijection, et l'on peut poser : $\nu = \mu^{-1}$. Les équations du mouvement peuvent alors s'écrire sous la forme : $\epsilon \circ \ddot{x} \circ \mu = dU(x)$. C'est la forme sous laquelle elles sont présentées dans [1], qui suppose que les masses sont strictement positives. La définition de μ que nous venons de donner correspond à la caractérisation (1) de la Proposition 1.15 de [1]. C'est la seule caractérisation qui possède encore un sens quand $M = 0$. En posant : $U(x) = \widehat{U}(\beta)$, on obtient la factorisation : $dU = 2\epsilon \circ x \circ d\widehat{U}$, ce qui permet d'écrire : $\gamma = 2x \circ d\widehat{U} \circ \nu = 2x \circ A$ en définissant l'endomorphisme de Wintner-Conley A par : $A = d\widehat{U} \circ \nu$.

On appelle espace du mouvement l'espace vectoriel $\text{vect}\{x_t(\xi), t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{D}^*\}$, où x_t désigne la configuration à l'instant t . C'est l'espace vectoriel engendré par le mouvement à translation près. On montre que pour tout t , $\text{Im } z_t$ est l'espace du mouvement.

2. Un lemme d'algèbre linéaire

Si F est un \mathbb{R} -espace vectoriel, f un endomorphisme de F et b une application linéaire : $F \rightarrow F^*$, on pose : $[f, b] = {}^t f \circ b - b \circ f$.

Proposition 2.1. Soient f un endomorphisme de F , \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et b une application linéaire : $F \rightarrow F^*$ symétrique (${}^t b = b$) positive (pour tout u , $\langle b(u), u \rangle \geq 0$). Il est équivalent d'écrire : $[f, b] = 0$ et $[f, [f, b]) = 0$.

Démonstration. L'implication directe est évidente. L'implication réciproque est évidente dans le cas où f est diagonalisable. Supposons $[f, [f, b]) = 0$ et f non diagonalisable. Il existe un polynôme réel P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et un entier $d \geq 1$ tels que l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker } P^d(f)$ ne soit pas diagonalisable.

– Supposons que P soit de la forme $X - \alpha$. Comme l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker } P^d(f)$ n'est pas diagonalisable, $d \geq 2$. Soit $u \in \text{Ker } P^d(f)$ tel que $P(f)(u) \neq 0$. Soit p le plus grand entier tel que $P^p(f)(u) \neq 0$. Posons $\xi' = P^{p-1}(f)(u)$, $\xi = P(f)(\xi') \neq 0$. On a : $(f - \alpha \text{Id})(\xi) = 0$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [f, [f, b)](\xi'), \xi' \rangle = \langle [f - \alpha \text{Id}, [f - \alpha \text{Id}, b)](\xi'), \xi' \rangle \\ &= \langle ({}^t(f - \alpha \text{Id})^2 \circ b + b \circ (f - \alpha \text{Id})^2 - 2{}^t(f - \alpha \text{Id}) \circ b \circ (f - \alpha \text{Id}))(\xi'), \xi' \rangle = -2\langle b(\xi), \xi \rangle. \end{aligned}$$

D'où, puisque b est positive : $b(\xi) = 0$. Soit \widetilde{F} un hyperplan de F ne contenant pas ξ . Dans $\{\xi, \widetilde{F}\}$, f possède une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} * & * \\ (0) & \widetilde{f} \end{pmatrix}$, b possède une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & \widetilde{b} \end{pmatrix}$, où \widetilde{b} est symétrique positive, $[f, b]$ a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & [f, \widetilde{b}] \end{pmatrix}$, et $[f, [f, b)]$ a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & [\widetilde{f}, [\widetilde{f}, \widetilde{b}]] \end{pmatrix}$. On conclut par récurrence.

– Le cas où P est de la forme $(X - \alpha)^2 + C$, où $C > 0$, se traite de façon analogue. \square

D'après cette proposition, il est équivalent d'écrire : $[A, \beta] = 0$ et $[A, [A, \beta]) = 0$. Nous dirons dans ce cas que la configuration est équilibrée. A masses positives, ce résultat, qui constitue la Proposition 2.6 de [1], s'obtient facilement, car A est symétrique pour le produit scalaire μ , donc diagonalisable.

Nous dirons qu'une configuration équilibrée est attractive si, et seulement si, la forme bilinéaire symétrique $\beta \circ A$ est négative. Quand les masses sont positives, cette définition est équivalente à celle de [1], d'après un argument de la preuve de la Proposition 2.8 de [1]. Notons que d'après [2], à masses positives, toutes les configurations équilibrées sont attractives (pour le potentiel newtonien). Donc si les masses sont toutes négatives, il n'y a pas de configuration équilibrée attractive.

3. Configurations équilibrées et mouvements rigides

Nous reprenons la définition de [1] d'un mouvement rigide et d'un équilibre relatif.

Proposition 3.1. *Au cours d'un mouvement rigide, l'état est un équilibre relatif à tout instant. Si, au cours d'un mouvement, à une certaine date, l'état est un équilibre relatif, le mouvement est rigide et la rotation est uniforme : il existe une application linéaire $\Omega : E \rightarrow E^*$ antisymétrique (${}^t\Omega = -\Omega$) constante telle que l'on ait, à tout instant : $\dot{x} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$.*

Démonstration. Les arguments de la preuve de ce résultat se trouvent dans [1], mais il faut remplacer la Proposition 2.6 de [1] par la Proposition 2.1, qui permet de traiter le cas où les masses sont de signe quelconque. \square

Proposition 3.2. *Une configuration est équilibrée si, et seulement si, il existe une application linéaire symétrique $S : \text{Im } x \rightarrow (\text{Im } x)^*$ telle que $\gamma = 2x \circ A = \epsilon^{-1} \circ S \circ x$ (par abus de langage, x et γ désignent ici des applications à valeurs dans $\text{Im } x$, et ϵ une application linéaire : $\text{Im } x \rightarrow (\text{Im } x)^*$). Dans ce cas, S est unique. Une configuration équilibrée est attractive si, et seulement si, S est négative.*

Un état est un équilibre relatif si, et seulement si, il existe une application linéaire antisymétrique $\Omega : E \rightarrow E^$ telle que $y = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, $\gamma = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x$. Dans ce cas, S est la restriction de $\Omega \circ \epsilon^{-1} \circ \Omega$ à $\text{Im } x$.*

Démonstration. On se limitera à l'assertion concernant les équilibres relatifs. Notons X le champ de vecteurs sur l'espace des états absolus qui définit les équations de Newton, et p l'application qui à un état associe l'état relatif correspondant. Un état z est un équilibre relatif si, et seulement si : $(X.p)(z) = dp(X(z)) = 0$. Ceci équivaut à dire qu'il existe une application linéaire $\Omega : E \rightarrow E^*$ antisymétrique telle que : $X(z) = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ z$. Cette égalité équivaut à : $y = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, $\gamma = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ y = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x$. \square

Cette caractérisation « absolue » des configurations équilibrées et des équilibres relatifs permet de prouver le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Etant donné un état d'équilibre relatif, la configuration associée est équilibrée attractive. On note r le rang d'une configuration équilibrée attractive et s le nombre de valeurs propres de $\epsilon^{-1} \circ S$ non nulles et de multiplicité impaire. Etant donnée une configuration équilibrée attractive et un espace E de dimension $r + s$, il existe des vitesses dans E telles que l'état associé soit un équilibre relatif.*

Les configurations centrales planes relèvent du cas : $r = 2$, $s = 0$. Dans le cas où toutes les valeurs propres de S sont non nulles et distinctes, on a $s = r$, et cette proposition est une conséquence de la Proposition 2.8 de [1] : il y a équilibre relatif pour certaines vitesses dans un espace de dimension $2r$.

Proposition 3.4. *Etant donnée une configuration équilibrée attractive, s'il existe des vitesses telles que l'état associé soit un équilibre relatif de rang impair, alors S n'est pas inversible.*

Démonstration. On suppose, par commodité : $\text{Im } z = E$. On a : $\text{Im } \gamma \subset \text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega)$, $\text{Im } y \subset \text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega)$. Donc $\text{Im } \gamma + \text{Im } y \subset \text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega)$. Comme $\text{rg } z$ est impair, l'application linéaire antisymétrique Ω n'est pas inversible.

Donc $\text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega) \subsetneq \text{Im } z = \text{Im } x + \text{Im } y$. D'où : $\text{Im } \gamma + \text{Im } y \subsetneq \text{Im } x + \text{Im } y$. D'où : $\text{Im } \gamma \subsetneq \text{Im } x$. Donc S n'est pas inversible. \square

D'après [2], si les masses sont toutes positives, pour toute configuration équilibrée, l'endomorphisme A est inversible. Donc $\text{Im } \gamma = \text{Im } x$. D'où S est inversible. Ainsi, à masses positives, le rang d'un état d'équilibre relatif est pair, ce qui fait l'objet de la Proposition 2.9 de [1].

4. Mouvements rigides de dimension 3

Nous allons maintenant construire des mouvements rigides pour lesquels l'espace du mouvement est de dimension 3. Nous dirons par abus de langage que la dimension du mouvement est 3. Quand E est orienté et de dimension 3 et $\Omega \neq 0$, on note $\vec{\omega}$ le vecteur rotation. On a, pour tout $\vec{u} \in E$, $\vec{\omega} \wedge \vec{u} = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)(\vec{u})$. Si les masses sont positives, de tels mouvements n'existent pas. Si cela était le cas, on aurait : $\text{rg } z = 3$. Or, d'après la remarque précédente, $\text{rg } z$ doit être pair. De même, de tels mouvements n'existent pas si $\text{rg } x = 1$. On aurait alors : $\text{rg } y \leq 1$. Donc $\text{rg } z \leq 2$, et le mouvement serait contenu dans un plan. Quand la somme des masses M s'annule, quatre corps formant un tétraèdre régulier vérifient : $\gamma = 0$. Ils peuvent donc subir un mouvement rigide de dimension 3. La proposition suivante, qui découle des résultats précédents, décrit les mouvements rigides de dimension 3 dont la configuration est de rang 2.

Proposition 4.1. *On suppose $\dim E = 3$. On se donne une configuration équilibrée attractive de rang 2. Il existe des vitesses initiales telles que le mouvement associé soit rigide de dimension 3 si, et seulement si : $\text{rg } \gamma = 1$. Dans ce cas, $\Omega \neq 0$ et la direction du vecteur rotation $\vec{\omega}$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im } \gamma$ dans $\text{Im } x$. Si $M = 0$, le vecteur $\vec{\omega}$ est colinéaire à $x(m_1, \dots, m_N)$.*

Nous allons donc étudier, dans le cas $N = 3$, les configurations équilibrées attractives de rang 2 telles que $\text{rg } \gamma = 1$. Si $M = 0$, on pose :

$$\xi_0 = (m_1, m_2, m_3), \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3}.$$

Soit $M' = m_1 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 + m_2 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 + m_3 \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3$. Si $M' = 0$, on pose :

$$\xi'_0 = (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3, \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3, \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3),$$

$$\vec{u}' = m_1 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 \vec{r}_1 + m_2 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 \vec{r}_2 + m_3 \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 \vec{r}_3.$$

Proposition 4.2. *Une configuration non colinéaire de trois corps vérifie : $\text{rg } \gamma = 1$ si, et seulement si, la configuration n'est pas équilatérale et l'une des deux relations suivantes est vérifiée :*

– $M = 0$. Dans ce cas : $\text{Ker } \gamma = \text{vect}\{\xi_0\}$, $\text{Im } \gamma = \text{vect}\{\vec{u}\}$. La configuration est équilibrée si, et seulement si, les vecteurs $x(\xi_0)$ et \vec{u} sont orthogonaux.

– $M' = 0$. Dans ce cas : $\text{Ker } \gamma = \text{vect}\{\xi'_0\}$, $\text{Im } \gamma = \text{vect}\{\vec{u}'\}$. La configuration est équilibrée si, et seulement si, les vecteurs $x(\xi'_0)$ et \vec{u}' sont orthogonaux.

La proposition suivante va permettre de construire des mouvements rigides tels que ceux décrits dans la Proposition 4.1.

Proposition 4.3. *On se donne une configuration de trois corps non colinéaire telle que \vec{u} (respectivement $x(\xi'_0)$) ne soit orthogonal à aucun des $\vec{r}_j - \vec{r}_i$. Alors il existe un unique système de masses à homothétie près vérifiant $M = 0$ (respectivement $M' = 0$) et tel que la configuration soit équilibrée. Et il existe un unique système de masses*

à homothétie de rapport positif près vérifiant $M = 0$ (respectivement $M' = 0$) et tel que la configuration soit équilibrée attractive. Pour ces systèmes de masses, on a : $\operatorname{rg} \gamma = 1$.

Considérons, en guise d'application, le cas particulier d'une configuration isocèle, telle que $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| = l_1$ et $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\| = l_2 < l_1$. D'après les Propositions 4.1 et 4.2 et la preuve de la Proposition 4.3, la configuration effectue un mouvement rigide de dimension 3 pour certaines vitesses initiales si, et seulement si, l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

- Le triplet (m_1, m_2, m_3) est de la forme $\alpha(1, -2, 1)$, avec $\alpha > 0$.
- Le triplet (m_1, m_2, m_3) est de la forme $\alpha(-1/l_1^3, 2/l_2^3, -1/l_1^3)$, avec $\alpha > 0$.

Dans les deux cas, le vecteur $\vec{\omega}$ appartient à l'axe de symétrie du triangle isocèle. On obtient les mêmes mouvements si $l_1 < l_2$, mais les masses doivent être multipliées par -1 .

Notons que les résultats précédant la Proposition 4.2 s'appliquent à un potentiel quelconque dépendant des distances mutuelles. Ils restent donc valables pour un système de N particules chargées. Le potentiel possède alors l'expression : $U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} q_i q_j / \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$.

Remerciements

Un grand merci à Alain Albouy et Alain Chenciner pour m'avoir encouragé à réfléchir sur ce sujet et pour m'avoir aidé à comprendre le contenu de l'article [1]. Je remercie également Carles Simó pour m'avoir fait remarquer que la plupart de ces résultats s'appliquaient également à des systèmes de particules chargées.

Références

- [1] A. Albouy, A. Chenciner, Le problème des N corps et les distances mutuelles, *Invent. Math.* 131 (1998) 151–184.
 [2] A. Albouy, On a paper of Moeckel on central configurations, *Regular and Chaotic Dynamics* 8 (2) (2003) 133–142.