Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 563–566

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Théorème de Liouville et propriété de la moyenne biharmonique restreinte

Mohamed El Kadiri

B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc

Reçu le 3 février 2004 ; accepté après révision le 1er mars 2005

Disponible sur Internet le 20 avril 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

On montre, sous certaine conditions, que si une fonction localement intégrable bornée vérifie la propriété de la moyenne restreinte pour les fonctions biharmoniques classiques dans $\mathbf{R}^n$, $n \neq 2$, ou dans un ouvert de $\mathbf{R}^2$ de complémentaire polaire, alors elle est constante. ***Pour citer cet article : M. El Kadiri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Liouville's Theorem and the restricted biharmonic mean property. We prove, under some conditions, that a bounded Lebesgue measurable function satisfying the restricted mean value for the biharmonic functions in $\mathbf{R}^n$, $n \neq 2$, or in an open set of $\mathbf{R}^2$ with polar complement, is constant. ***To cite this article: M. El Kadiri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Un grand nombre de propriétés des fonctions harmoniques s'étend aux fonctions biharmoniques : propriété de la moyenne, théorème de type Liouville, convergence de suites de fonctions harmoniques, ... Toutefois, de nombreux résultats, anciens et récents, concernant les fonctions harmoniques ne sont pas encore démontrés pour les fonctions biharmoniques. Citons, entre autres, le théorème des deux rayons de Delsarte. Il existe aussi des situations fort intéressantes où certaines propriétés des fonctions biharmoniques peuvent se traduire, comme celles des fonctions harmoniques, par des résultats géométriques (espaces symétriques de rang strictement supérieur à un et géométrie riemannienne) et où de nombreuses questions – concernant les fonctions harmoniques ou biharmoniques – restent ouvertes.

Adresse e-mail : elkadiri@fsr.ac.ma (M. El Kadiri).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.03.001

Durant les dix dernières années, Hansen et Nadirashvili ont établi des critères d'harmonicité et de théorème de type Liouville pour des classes larges de fonctions vérifiant la propriété de la moyenne sur certaines boules de $\mathbf{R}^n$. C'est dans la ligne des travaux récents de Hansen et Nadirashvili que s'inscrit notre travail de recherche de critères de biharmonicité et de théorèmes de type Liouville pour certaines classes de fonctions. Les méthodes développées par Hansen et Nadirashvili, et qui s'appuient sur la frontière minimale de Martin, un balayage transfini de mesures et quelques propriétés de l'équation de Schrödinger, peuvent s'étendre aux fonctions sur les variétés riemanniennes, les espace symétriques et les arbres (cas discret) et conduire à des applications intéressantes, l'extension au cas biharmonique de ces méthodes peut se faire dans ce cadre élargi.

Dans cette Note nous nous restreignons à énoncer nos résultats dans $\mathbf{R}^n$, et nous reviendrons ultérieurement à toutes ces questions en détails dans le cadre des variétés riemanniennes et dans le cas discret.

Rappelons que toute fonction biharmonique f dans $\mathbf{R}^n$ vérifie la formule de la moyenne biharmonique sur toute boule $B = B(x,r)$ de centre x et de rayon $r > 0$: $f(x) = \frac{1}{|B|}\int_B f\,\mathrm{d}\lambda - \frac{r^2}{2(n+2)}\Delta f(x)$, où $|B|$ est le volume de la boule B et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Cette formule, qui se trouve dans [10], est dûe à Pizzetti. Il résulte aisément de cette propriété que si f est bornée, alors elle est constante. C'est le théorème de Liouville pour les fonctions biharmoniques.

Rappelons aussi qu'une fonction f sur un domaine U de $\mathbf{R}^n$, localement intégrable et dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction, vérifie la propriété de la moyenne biharmonique restreinte s'il existe une fonction $r : U \to \mathbf{R}_+$ telle que $r(x) \leqslant d(x, CU)$ et

$$f(x) = \frac{1}{|B(x)|}\int_{B(x)} f\,\mathrm{d}\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)}\Delta f(x) \tag{1}$$

pour tout $x \in U$, où $B(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $r(x)$.

Comme pour la formule de la moyenne harmonique, deux questions intéressantes se posent alors :

(i) Soit $f : U \to \mathbf{R}$ vérifiant la propriété de la moyenne biharmonique restreinte. Est-ce que f est biharmonique ?

(ii) Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction bornée vérifiant la propriété de la moyenne biharmonique restreinte. Est-ce que f est constante ?

Dans le cas harmonique ces questions ont été étudiées par Hansen et Nadirashvili [5–9]. La première question a déjà fait l'objet d'une Note de l'auteur aux comptes rendus de l'Académie des Sciences [2].

Notre but dans ce travail est de montrer que sous des conditions de régularité des fonctions r et Δf et une condition de contrôle de croissance de la fonction r, la réponse à la question 2 est positive. La méthode que nous allons suivre consiste encore à utiliser des mesures de représentation des fonctions harmoniques ayant déjà servi dans [1,2], en liaison avec la formule de la moyenne pour les fonctions biharmoniques, auquelles seront appliqués les résultats de [7–9].

Le mot fonction signifiera toujours, sauf mention du contraire, fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$. Tous les résultats de ce travail s'étendent aux fonctions polyharmoniques d'ordre > 2. Nous n'avons considéré que le cas biharmonique pour des raisons de simplicité.

2. Énoncés des résultats

Dans le plan et la droite, nous avons :

Théorème 2.1. *Soient n un entier $\leqslant 2$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que $U = \mathbf{R}$ si $n = 1$ et $CU = \mathbf{R}^2 \setminus U$ est polaire si $n = 2$. Soient r une fonction réelle sur U telle que $0 < r(x) \leqslant \|x\| + M_0$ pour une constante M_0, et f une fonction bornée mesurable au sens de Lebesgue sur U, dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction bornée inférieurement et telle que*

$$f(x) \geqslant \frac{1}{|B(x)|} \int\limits_{B(x)} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)} \Delta f(x), \tag{2}$$

pour tout $x \in U$, où $B(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $r(x)$. Si Δf est s.c.i. ou si r est bornée inférieurement sur tout compact par une constante > 0, alors f est constante.

Corollaire 2.2. *Soient n un entier $\leqslant 2$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que $U = \mathbf{R}$ si $n = 1$ et $CU = \mathbf{R}^2 \setminus U$ est polaire si $n = 2$. Soient r une fonction réelle sur U telle que $0 < r(x) \leqslant \|x\| + M_0$ pour une constante $M_0 > 0$, et f une fonction bornée mesurable au sens de Lebesgue sur U, dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction bornée et telle que*

$$f(x) = \frac{1}{|B(x)|} \int\limits_{B(x)} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)} \Delta f(x),$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, où $B(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $r(x)$. Si Δf est continue ou si r est bornée inférieurement sur tout compact par une constante > 0, alors f est constante.

Pour $n \geqslant 3$, nous avons

Théorème 2.3. *Soient n un entier $\geqslant 3$ et r une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$, telle que $0 < r(x) \leqslant \|x\| + M_0$ pour une constante $M_0 > 0$, et soit f une fonction bornée mesurable au sens de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction bornée inférieurement et telle que*

$$f(x) = \frac{1}{|B(x)|} \int\limits_{B(x)} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)} \Delta f(x), \tag{3}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, où $B(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $r(x)$. Si Δf est continue ou si r est bornée inférieurement sur tout compact par une constante > 0, alors f est constante.

On dit qu'une fonction f sur un ouvert U est bornée par une autre fonction $g \geqslant 0$ sur U si on a $|f| \leqslant g$. En combinant le théorème précédent et les Théorèmes 9 et 10 de [1] (Théorèmes 2.1 et 2.2 de [2]), on obtient

Corollaire 2.4. *Soit f une fonction localement intégrable dans un domaine U de $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction bornée par une fonction harmonique $\geqslant 0$ et soit r une fonction réelle > 0 sur U telle que pour tout $x \in U$, $B(x) \subset U$ et (1) a lieu, où $B(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $r(x)$. Si $U = \mathbf{R}^n$, on suppose en plus que f est bornée et que $r(x) \leqslant \|x\| + M_0$, pour une constante $M_0 \in \mathbf{R}_+$. Supposons aussi que Δf est continue ou que r est bornée inférieurement sur tout compact par une constante > 0. Alors f est biharmonique.*

Remarque 1. Nous ne savons pas si on peut se passer dans le Théorème 2.3 et le Corollaire 2.4 de l'hypothèse que Δf bornée.

Remarque 2. Si la fonction r est inférieurement bornée par une constante > 0, alors la condition f bornée et la propriété de la moyenne biharmonique restreinte du théorème entraine que la fonction Δf est bornée. En effet, on a

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left|\Delta f(x)\right| \leqslant \frac{4(n+2)}{\inf_{x\in\mathbf{R}^n} r(x)} \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left|f(x)\right| < +\infty.$$

Remarque 3. Le Théorème 2.4 a été établi dans le cas $n = 2$ dans un travail en collaboration avec Haddad [4].

3. Démonstration des résultats

Nous allons nous contenter de donner juste une esquisse des démonstrations des résultats, les détails paraitront ultérieurement. Si Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$. On note G_Ω son noyau de Green normalisé de sorte que l'on ait au sens des distributions $\Delta G_\Omega(\cdot, y) = -\epsilon_y$ pour tout $y \in \Omega$, où ϵ_y est la mesure de Dirac au point y. Pour toute boule $B = B(x, r)$ ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre x et de rayon $r >$ on pose pour tout $z \in \mathbf{R}^n$ $w_B(x, z) = G_\Omega(x, z) - \frac{1}{|B|}\int_B G_\Omega(y, z)\,\mathrm{d}\lambda(y)$, où Ω est un domaine borné contenant B et tel que $z \in \Omega$.

La fonction $w_B(x, \cdot)$ ne dépend que de B et non du domaine Ω contenant B. En outre, il n'est pas difficile de voir que la fonction w_B vérifie les propriétés suivantes :

(i) $w_B(x, y) = 0$ si $y \notin B$;

(ii) La fonction $w_B(x, \cdot)$ est invariante par rotation autour de x ;

(iii) On a $\frac{2(n+2)}{r^2}\int w_B(x, y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$.

Cette égalité est une conséquence immédiate de la formule de la moyenne biharmonique sur B appliquée à la fonction $\int_{B'} G_{B'}(\cdot, y)dy$, où B' est une boule ouverte de centre x telle que $\overline{B} \subset B'$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $r > 0$, la mesure μ_x^r sur $\mathbf{R}^n$ de densité $\frac{2(n+2)}{r^2}w_{B(x,r)}(x, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue est une mesure de probabilité portée par $\overline{B(x, r)}$ et invariante par rotations autour de x. En particulier, on a, $\int s(y)\,\mathrm{d}\mu_x^r(y) \leqslant s(x)$ pour toute fonction surharmonique $s \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}^n$. L'application $(x, A) \mapsto \mu_x^r(A)$, A borélien de $\mathbf{R}^n$, est un noyau Markovien sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire une fonction $N : \mathbf{R}^n \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \to \overline{R}_+$, où $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ est la tribu de Borel de $\mathbf{R}^n$, vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, la fonction $x \mapsto N(x, A)$ est borélienne,

(ii) Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la fonction $A \mapsto N(x, A)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\Omega)$.

Soit U un domaine de $\mathbf{R}^n$ vérifiant les conditions du Théorème si $n \leqslant 2$ ou $U = \mathbf{R}^n$ si $n \geqslant 3$ et soit $r : U \to \mathbf{R}_+$ telle qu'il existe une constante $M_0 \geqslant 0$ telle que $r(x) \leqslant \|x\| + M_0 = \rho(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Notons μ_x la mesure $\mu_x^{r(x)}$. Lorsque la fonction r est mesurable, le noyau Markovien $(x, A) \mapsto \mu_x^{r(x)}(A)$ vérifie les conditions d'application des résultats de la Section 2 de [5] et de ceux de [6], remarque de la page 94, pour $n = 1$. Le Théorème 3.2, ainsi que le Théorème 3.1 résultent d'une application des résultats de [7,8] et du théorème de Liouville pour les fonctions biharmoniques.

La preuve dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ diffère de celle du cas $n \geqslant 3$. Cela tient comme pour la propriété de la moyenne harmonique à la non-existence de solution fondamentale positive du Laplacien lorsque $n \leqslant 2$, contrairement au cas $n \geqslant 3$. Pour $n = 1$, on montre que les noyaux $(x, A) \mapsto \mu_x(A)$ vérifient le conditions de [8]. Lorsque $n = 2$, le Théorème 2.1 résulte d'une extension du Théorème 1.1 de [9] au noyaux $(x, A) \mapsto \mu_x(A)$ que nous avons obtenue dans [4]. Pour $n = 1$, le résultat est démontré dans [3].

Added on the proofs : Après la soumission de cette note, le Théorème 2.1 et les détails de sa démonstration sont apparus dans Electronic Journal of Differential Equations, 2004.

Références

[1] M. El Kadiri, Une réciproque du théorème de la moyenne pour les fonctions biharmoniques, Aequationes Math. 65 (2003) 28–280.
[2] M. El Kadiri, Sur la propriété de la moyenne restreinte pour les fonctions biharmoniques, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 427–429.
[3] M. El Kadiri, Théorème de Liouville et propriété de la moyenne biharmonique restreinte dans la droite réelle, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. 27 (5) (2003) 89–94.
[4] M. El Kadiri, S. Haddad, Théorème de Liouville et propriété de la moyenne biharmonique restreinte dans le plan, Preprint, Rabat, 2003.
[5] W. Hansen, N. Nadirashvili, A converse to the mean value theorem for harmonic functions, Acta Math. 171 (1993) 139–163.
[6] W. Hansen, N. Nadirashvili, Mean values and harmonic functions, Math. Ann. 297 (1) (1993) 157–170.
[7] W. Hansen, N. Nadirashvili, Liouville's theorem and the restricted mean values property, J. Math. Pures Appl. (9) 74 (2) (1995) 185–198.
[8] W. Hansen, N. Nadirashvili, Restricted mean value property on $\mathbf{R}^d$, $d \leqslant 2$, Exposition. Math. 13 (1995) 93–95.
[9] W. Hansen, Liouville's theorem and the restricted mean value property in the plane, J. Math. Pures Appl. 76 (1998) 943–947.
[10] M. Nicolescu, Les fonctions polyharmoniques, Paris, Hermann, 1936.