Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 739–742
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie/Théorie des groupes

Singularité de la mesure harmonique sur le bord d'un groupe hyperbolique

Vincent Le Prince

IRMAR, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 14 janvier 2005 ; accepté après révision le 31 mars 2005

Présenté par Mikhaël Gromov

Résumé

On établit un lien entre la dimension de la mesure harmonique ν, l'entropie asymptotique h et la vitesse de fuite l associées à une marche aléatoire sur le groupe des isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, lien de la forme $\dim\nu \leqslant h/l$. Ensuite, on utilise cette propriété afin de construire une mesure harmonique de dimension aussi petite que voulue et on en déduit un résultat sur le type de cette mesure. ***Pour citer cet article : V. Le Prince, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Singularity of the harmonic measure on the boundary of a hyperbolic group. This Note deals with the dimension of the harmonic measure ν associated with a random walk on the isometry group of a Gromov hyperbolic space. We establish a link of the form $\dim\nu \leqslant h/l$ between the dimension of the harmonic measure, the asymptotic entropy h of the random walk and its rate of escape l. Then we use this inequality to show that the dimension of this measure can be made arbitrarily small and deduce a result on the type of the harmonic measure. ***To cite this article: V. Le Prince, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

On considère un espace hyperbolique au sens de Gromov (X,d) [4], dans lequel, un point de base o étant fixé, on note $(\cdot|\cdot)$ le produit de Gromov. Son bord géométrique est noté ∂X. On se donne un sous-groupe dénombrable G du groupe des isométries de (X,d) agissant proprement discontinûment. L'ensemble limite Λ_G de G est défini comme l'ensemble des points d'accumulation dans ∂X de l'orbite Go. On supposera cet ensemble infini ; G est alors dit non-élémentaire.

Adresse e-mail : vincent.leprince@math.univ-rennes1.fr (V. Le Prince).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.010

Etant donnée une mesure de probabilité μ sur G, on définit la marche aléatoire associée $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_0=e$ et pour $n\geqslant 1$ $x_n=h_1\cdots h_n$, $(h_i)_{i\geqslant 1}$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ. On note $\mathbb{P}$ la loi de la trajectoire $\boldsymbol{x}=(x_n)$ dans $G^{\mathbb{N}}$; la loi de x_n est la convolée $n^{\text{ème}}$ de μ, notée μ^n. Sous certaines hypothèses, on sait décrire le comportement asymptotique de cette marche :

Proposition 1.1 [7]. *On suppose que le support de μ engendre le groupe G. Alors la suite $(x_n o)$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers un élément x_∞ de ∂X.*

On appelle mesure harmonique la distribution de x_∞, notée ν. Cette mesure ν est μ-stationnaire : $\nu=\mu*\nu$. Si de plus la mesure μ admet un moment d'ordre 1, c'est à dire $\sum_{g\in G}\mu(g)d(o,go)<+\infty$, alors $(\partial X,\nu)$ coincide avec le bord de Poisson de (G,μ) [7].

Nous allons nous intéresser ici à la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique et par conséquent à son type. Concernant ces caractéristiques, on sait déjà que la mesure harmonique n'a pas d'atome. Si le support de μ engendre G en tant que semi-groupe, le support de ν est l'ensemble limite. Notre but sera ici de construire sur G une mesure μ symétrique telle que la mesure harmonique associée soit singulière par rapport à la mesure de Hausdorff sur Λ_G. Pour cela, on établit dans la partie 2 une relation entre la dimension de la mesure harmonique, la vitesse de fuite l de la marche aléatoire et son entropie asymptotique h qui étend la relation $\dim_H\nu=\frac{h}{l}$, établie, dans le cas des arbres, dans [6] ([8] pour le groupe libre).

Rappelons les définitions des termes intervenant dans cette relation. On supose ici que μ admet un moment d'ordre 1. On appelle vitesse de fuite de la marche le taux de croissance asymptotique de la distance moyenne entre $x_n o$ et o [5] ; c'est à dire, en notant $L(\mu^n)=\sum_{g\in G}\mu^n(g)d(o,go)$ (fini car μ admet un moment d'ordre 1), la limite $l(\mu)$ de la suite $(L(\mu^n)/n)_n$, limite qui existe car la suite $(L(\mu^n))$ est sous-additive. De même en notant $H(\mu^n)=-\sum\mu^n(g)\log(\mu^n(g))$ l'entropie usuelle de la loi μ^n (également finie lorsque μ admet un moment d'ordre 1), on définit l'entropie asymptotique [1] comme la limite $h(\mu)$ de la suite $(H(\mu^n)/n)_n$. Quant à la dimension de ν, il s'agit de la dimension de Hausdorff minimale d'un ensemble de ν-mesure égale à 1 ; on la note alors $\dim_H\nu$. Rappelons également l'inégalité $h\leqslant lv$ [5], v désignant la croissance d'une orbite de G dans X.

Les preuves détaillées des résultats annoncés dans cette note peuvent être trouvées dans [9].

2. Majoration de la dimension

On se place dans le cadre de l'introduction. On se donne également une mesure μ admettant un moment d'ordre 1 et dont le support engendre G.

Dans le cas où X est un arbre, on définit une distance sur ∂X en posant $d'(\xi_1,\xi_2)=\mathrm{e}^{-(\xi_1|\xi_2)}$. Dans le cas général, il existe sur $X\cup\partial X$ une famille de distances $(d_a)_{1<a<a_0}$ ayant des propriétés similaires, en particulier, pour z_1 et z_2 dans $X\cup\partial X$, $d_a(z_1,z_2)\leqslant Ca^{-(z_1|z_2)}$, où C est une constante (voir [3], Chapitre 11). On fixe pour la suite une telle distance d_a. Etant donnée une mesure de probabilité m sur un espace métrique (E,d), dont on note $B(t,r)$ les boules, on appelle dimension ponctuelle (supérieure) de m en un point t la limite : $\overline{\dim}_P m(t)=\limsup_{r\to 0}\log m(B(t,r))/\log r$. Sous certaines conditions sur l'espace (E,d), cette dimension ponctuelle majore $\dim_H\nu$ (définie dans l'introduction) ; elle permet de plus une vision plus intuitive de la dimension : c'est la vitesse de décroissance de la mesure des boules.

On établit dans ce cadre le résultat suivant (la distance considérée étant d_a) :

Proposition 2.1. *Pour ν-presque tout ξ dans ∂X, on a $\overline{\dim}_P\nu(\xi)\leqslant\frac{1}{\log a}\frac{h}{l}$.*

Décrivons en brièvement la preuve. On note $C_{\boldsymbol{x}}^n$ l'ensemble des trajectoires coincidant avec $\boldsymbol{x}$ au temps n et $D(\xi,r)=\{\boldsymbol{x}\colon\ x_\infty\in B(\xi,r)\}$. Rappelons que l'on a une convergence $\mathbb{P}$-presque sûre de $(-\log\mu^n(x_n)/n)_n$ et $(d(o,x_n o)/n)_n$ respectivement vers h et l. Deux réels η et ϵ strictement positifs étant fixés, on introduit l'ensemble

$\Omega_{N,\epsilon}$ des trajectoires telles que si $n \geqslant N$, $(x_n|x_{n+1}) > (l-\epsilon)n$. Si N est assez grand, alors $\mathbb{P}(\Omega_{N,\epsilon}) \geqslant 1-\eta/2$; on note Ω un tel $\Omega_{N,\epsilon}$. En utilisant la propriété de d_a citée ci-dessus, on obtient, pour $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et $n \geqslant N$, l'inclusion $C_{\boldsymbol{x}}^n \cap \Omega \subset D(x_\infty, Ka^{-n(l-\epsilon)})$, K étant une constante. Ceci entraîne

$$\overline{\dim}_P\,\nu(x_\infty) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \mathbb{P}(D(x_\infty, Ka^{-n(l-\epsilon)}))}{\log(Ka^{-n(l-\epsilon)})} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \mathbb{P}(C_{\boldsymbol{x}}^n \cap \Omega)}{-n(l-\epsilon)\log a}.$$

On s'appuie ensuite sur un résultat de [6] qui affirme que sur un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ de mesure supérieure à $1-\eta$, on a $\limsup_{n\to+\infty} \log \mathbb{P}(C_{\boldsymbol{x}}^n \cap \Omega)/n = \limsup_{n\to+\infty} \log \mu^n(x_n)/n$; ce qui permet de déduire de l'inégalité précédente que sur Ω', $\overline{\dim}_P\,\nu(x_\infty) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} -\log\mu^n(x_n)/n(l-\epsilon)\log a$; et donc que sur un ensemble de mesure plus grande que $1-\eta$, $\overline{\dim}_P\,\nu(x_\infty) \leqslant h/(l-\epsilon)\log a$.

3. Construction d'une mesure harmonique de petite dimension

On se place toujours dans le même cadre. On souhaite construire une mesure telle que la dimension de la mesure harmonique associée soit aussi petite que voulue. Pour cela on se donne une mesure μ symétrique admettant un moment d'ordre 1 et dont le support engendre G, ainsi qu'un élément hyperbolique γ_0 (G en contient un car G est non-élémentaire, voir [3]). On note alors $\gamma_k = \gamma_0^k o$ et $\gamma_\pm = \lim_{k\to\pm\infty} \gamma_k$. Puis pour chaque $k \geqslant 0$ on pose $\mu_k = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma_k} + \delta_{\gamma_{-k}})$. On note ν_k la mesure harmonique associée à μ_k.

La quantité $h(\mu_k)$ est bornée car elle est majorée par $H(\mu_k)$, et on voit facilement que $H(\mu_k)$ est bornée. Vue la Proposition 2.1, le problème est donc ensuite de montrer que la vitesse de fuite devient grande. On résume ici les principales étapes de cette démonstration.

Etant donné un rayon géodésique h, on définit le cocycle de Busemann β_h associée sur X^2 par : $\beta_h(x,y) = \lim_{t\to+\infty}[d(y,h(t)) - d(x,h(t))]$. Si de plus X est un espace CAT(-1) (par exemple un arbre ou le plan hyperbolique), cette quantité ne dépend que de la classe d'équivalence ξ de h dans ∂X ; on la note alors $\beta_\xi(x,y)$. Pour plus de simplicité, on se place maintenant dans ce cadre (sinon on a un cocycle « à une constante près »). On a alors la formule suivante :

$$l(\mu) = \sum_{g\in G} \mu(g) \int_{\partial X} \beta_\xi(o, g^{-1}o)\,\mathrm{d}\nu(\xi) \;;$$

et pour les mesures μ_k on obtient ainsi (dans le cas général, à une constante additive près) :

$$l(\mu_k) = \frac{1}{2}\sum_g \mu(g) \int_{\partial X} \beta_\xi(o, g^{-1}o)\,\mathrm{d}\nu_k(\xi) + \frac{1}{4}\int_{\partial X} \big[\beta_\xi(o,\gamma_k) + \beta_\xi(o,\gamma_{-k})\big]\,\mathrm{d}\nu_k(\xi). \tag{1}$$

Le premier membre de cette somme est borné. Quant au second, pour montrer qu'il devient grand on a besoin des lemmes suivants. Tout d'abord une propriété due à la convexité de la distance :

Lemme 3.1. *Il existe une constante C, qui dépend uniquement de δ et de γ_0, telle que pour tout k et pour tout ξ, $\beta_\xi(o,\gamma_k) + \beta_\xi(o,\gamma_{-k}) \geqslant C$.*

Ensuite la minimalité de l'action de G sur son ensemble limite nous permet d'obtenir :

Lemme 3.2. *Soit U un ouvert rencontrant Λ_G. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout k on ait $\nu_k(U) \geqslant \alpha$.*

On choisit ensuite convenablement U (par la condition : $\forall\xi \in U$, $(\xi|\gamma_\pm) \leqslant$ *constante*) de sorte que pour $\xi \in U$ (et uniformément), $\beta_\xi(o,\gamma_k)$ et $\beta_\xi(o,\gamma_{-k})$ tendent vers l'infini avec k ; ce qui permet de montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_U \left[\beta_\xi(o,\gamma_k) + \beta_\xi(o,\gamma_{-k})\right] \mathrm{d}\nu_k(\xi) = +\infty.$$

Quant à l'intégrale sur U^C, on la minore grâce au Lemme 3.1. On déduit alors de la formule (1) :

Proposition 3.3. *La suite* (μ_k) *a la propriété suivante* : $\lim_{k\to\infty} \frac{h(\mu_k)}{l(\mu_k)} = 0$.

La Proposition 2.1 nous permet alors d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Soient* (X,d) *un espace hyperbolique et* G *un sous-groupe du groupe des isométries de* X *agissant proprement discontinûment, non-élémentaire. On fixe une distance* d_a *sur* ∂X*. Alors pour chaque* $\eta > 0$*, il existe une mesure* μ *symétrique dont le support engendre* G*, admettant un moment d'ordre* 1*, et ayant la propriété suivante* : *la dimension ponctuelle supérieure de la mesure harmonique* ν *associée à la marche aléatoire engendrée par* μ *est* ν*-presque sûrement inférieure à* η*. Si de plus* G *est finiment engendré,* μ *peut être choisie à support fini.*

Dans le cas d'un groupe hyperbolique agissant sur son graphe de Cayley (on fixe un système de générateurs S), la dimension de ∂G (on a fixé une distance d_a) est égale à la croissance (par rapport à S) $v_a(G)$ de G (voir [2]) :

$$v_a(G) = \limsup_{R\to\infty} \frac{\log_a \operatorname{card}\{g \in G:\ d(e,g) \leqslant R\}}{R} \ ;$$

et la mesure de Hausdorff est finie et non nulle. On peut alors majorer la dimension usuelle par la dimension ponctuelle ; et comme la première est un invariant du type, on en déduit la propriété suivante.

Corollaire 3.5. *Etant donné un groupe hyperbolique* G *non-élémentaire, il existe une mesure* μ *symétrique à support fini dont le support engendre* G*, et telle que la mesure harmonique associée et la mesure de Hausdorff sur* ∂G (*sur lequel on a fixé une distance* d_a) *soit singulières.*

Remerciements

Je tiens à remercier Vadim Kaimanovich pour ses conseils lors de l'élaboration de ce travail.

Références

[1] A. Avez, Entropie des groupes de type fini, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 275 (1972) 241–270.

[2] M. Coornaert, Mesures de Patterson–Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, Pacific J. Math. 159 (1993) 241–270.

[3] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, Les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture Notes in Math., vol. 1441, Springer, 1990.

[4] M. Gromov, Hyperbolic groups, in: S.M. Gersten (Ed.), Essays in Group Theory, in: MSRI Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 75–263.

[5] Y. Guivarc'h, Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire, Astérisque 74 (1980) 47–78.

[6] V.A. Kaimanovich, Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees, Ergodic Theory Dynamical Systems (1998) 631–660.

[7] V.A. Kaimanovich, The Poisson formula for groups with hyperbolic properties, Ann. of Math. 152 (2000) 659–692.

[8] F. Ledrappier, Some asymptotic properties of random walks on free groups, in: J. Taylor (Ed.), Topics in Probability and Lie Groups: Boundary Theory, in: CRM Proc. and Lecture Notes, vol. 28, Amer. Math. Soc., 2001, pp. 117–152.

[9] V. Le Prince, Dimensional properties of the harmonic measure for a random walk on a hyperbolic group, prépublication IRMAR, 2004.