Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 719–724

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Sur un problème de shallow water bicouche avec conditions aux limites de Dirichlet

Fabien Flori, Pierre Orenga, Mathieu Peybernes

UMR 6134, université de Corse, quartier Grossetti, BP 52, 20250 Corte, France

Reçu le 13 décembre 2004 ; accepté le 22 mars 2005

Disponible sur Internet le 4 mai 2005

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous présentons dans cette Note un résultat d'existence pour un problème de shallow water bicouche, avec conditions aux limites de Dirichlet. La principale difficulté provient des termes couplant les deux couches. Pour les traiter, nous devons coupler l'estimation naturelle d'énergie avec une estimation des épaisseurs dans $L^2(Q)$. Pour obtenir cette estimation L^2, nous introduisons l'opérateur de Stokes et utilisons quelques résultats sur les espaces de Hardy pour traiter les termes non linéaires. ***Pour citer cet article : F. Flori et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

On a bi-layer shallow water problem with Dirichlet boundary conditions. We present in this Note an existence result for a bi-layer shallow water problem, with Dirichlet boundary conditions. The main difficulty arises from the terms coupling the two layers. To handle these, we must couple the natural energy estimate with an estimation of the thickness in $L^2(Q)$. To obtain this L^2-estimate, we introduce the Stokes operator and we use results for Hardy spaces to treat the nonlinear terms. ***To cite this article: F. Flori et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

In this Note, we study a bi-layer shallow water model in depth-mean velocity formulation [5]. In this model, we consider a system composed by two superposed shallow layers of immiscible fluids with different and constant densities ρ_1 and ρ_2 ($\rho_2 \leqslant \rho_1$). The equations of this model result from integration on the vertical of the three-dimensional equations of the geophysical fluids. A lot of applications can be found to this model as for instance the modelling of the dynamics of water masses in the Alboran Sea and the Straits of Gibraltar. In this sea, two layers of water can be distinguished: the surface Atlantic water penetrating into the Mediterranean sea through the

Adresses e-mail : flori@univ-corse.fr (F. Flori), orenga@univ-corse.fr (P. Orenga), peybernes@univ-corse.fr (M. Peybernes).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.019

Straits of Gibraltar, and the deeper, denser Mediterranean water flowing into the Atlantic. We assume that the water surface occupies a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^2$, simply connected, with boundary Γ smooth enough. Let Q be equal to $\Omega \times (0,T)$ and $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. If $v = (v_1, v_2)$ is a vector function from Ω into $\mathbb{R}^2$ and q a scalar function from Ω into $\mathbb{R}$, we define the operators $\alpha(v) = (-v_2, v_1)$, $\operatorname{Rot} q = (\frac{\partial q}{\partial x_2}, -\frac{\partial q}{\partial x_1})$ and $\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$. We denote by $u_1 = (u_{1,1}, u_{1,2})$ (resp. $u_2 = (u_{2,1}, u_{2,2})$) and h_1 (resp. h_2) the velocity vector field and the thickness of the lower layer (resp. upper layer). In what follows, to avoid unnecessary mathematical technicalities, we do not take into account the Coriolis force, the wind on the surface water, the bottom shear and the interface friction. Thus, denoting by $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ the diffusion coefficients, we study the following problem:

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \nabla \operatorname{div} u_i - \mu_i \Delta u_i + (u_i \cdot \nabla) u_i + g \nabla h_i + g_i \nabla h_j = 0 & \text{in } Q, \\ u_i = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i h_i) = 0 & \text{in } Q, \\ u_i(t=0) = u_{i,0} \quad \text{and} \quad h_i(t=0) = h_{i,0} & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

for $i = 1, 2$ and $j = 1, 2$, with $j \neq i$. Here, g is the acceleration of gravity and $g_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} g$, $g_2 = g$. The coupling of the two layers is taken into account by the pressure terms $g_i \nabla h_j$. We are going to show the following existence result:

Theorem 0.1. *Let $u_{i,0} \in L^2(\Omega)^2$ and $h_{i,0} > 0$ such that $h_{i,0} \log h_{i,0} \in L^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. If the data are controlled, then there exists a solution $\{(u_1, h_1), (u_2, h_2)\}$ of the above problem* (P) *satisfying: $u_i \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^2) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^2)$, $h_i \log h_i \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$ and $h_i \in L^2(Q)$ for $i = 1, 2$, in such a way that the momentum and the continuity equations are respectively solved in $L^{4/3}(0,T; H^{-1}(\Omega)^2)$ and $L^{4/3}(0,T; W^{-1,4/3}(\Omega))$.*

The main difficulty, which does not appear in the one-layer shallow water problem [6], comes from the terms $g_i \nabla h_j$ coupling the two layers. To treat these terms, we need to have a bound on h_i in $L^2(Q)$ according to some bounds on u_i in $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^2) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^2)$ and $h_i \log h_i$ in $L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$. This result is obtained by Munoz-Ruiz et al. [5] when the following boundary conditions are considered: $u_i \cdot n = \operatorname{rot} u_i = 0$ on Σ. With these conditions, we can easily uncouple the momentum equation into a potential equation and a rotational equation, which allows the authors to obtain an estimate of h_i in $L^2(Q)$. In the situation of Dirichlet boundary conditions, we can not uncouple the momentum equation, and we have to use another method to obtain this L^2-estimate. Notice that the result we obtain complete the works of Munoz-Ruiz et al. in [4], in which the authors obtain an existence result in the one-dimensional case with Dirichlet boundary conditions.

1. Un résultat d'existence

Nous présentons dans cette section un résultat d'existence pour le problème (P) :

Théorème 1.1. *Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)^2$, $h_{i,0} > 0$ vérifiant $h_{i,0} \log h_{i,0} \in L^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. Si les données sont bien choisies, alors le problème* (P) *admet une solution $\{(u_1, h_1), (u_2, h_2)\}$ vérifiant : $u_i \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^2) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^2)$, $h_i \log h_i \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$ et $h_i \in L^2(Q)$, $i = 1, 2$, où les équations des moments et de continuité sont respectivement résolues dans les espaces $L^{4/3}(0,T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $L^{4/3}(0,T; W^{-1,4/3}(\Omega))$.*

Pour obtenir les estimations d'énergie, nous procédons dans un premier temps de la même manière que dans le cas monocouche [6]. On multiplie respectivement les équations des moments par u_1 et u_2, on intègre sur Ω et on ajoute les deux équations :

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|u_i\|^2_{L^2(\Omega)^2}+g\int_\Omega h_i\log h_i\,\mathrm{d}x\right]+\lambda_i\|\operatorname{div}u_i\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\mu_i-\frac{C_{GN}}{2}\|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}\right)\|u_i\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{2}g_i(h_j,\operatorname{div}u_i),\tag{1}$$

où C_{GN} est une constante issue des inégalités de Gagliardo–Niremberg. La principale difficulté qui différencie ce problème du modèle de shallow water monocouche [6] provient des termes $(h_j,\operatorname{div}u_i)$. Pour estimer ces termes, nous avons besoin d'avoir une borne sur h_i dans $L^2(Q)$ en fonction de bornes sur u_i dans $L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)$ et $h_i\log h_i$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Ce résultat a été obtenu par Munoz-Ruiz et al. [5] avec les conditions aux limites suivantes : $u_i\cdot n=\operatorname{rot}u_i=0$ sur Σ. Avec ces conditions, on peut facilement découpler l'équation des moments en une équation rotationnelle et une équation potentielle, ce qui permet aux auteurs d'obtenir une estimation sur h_i dans $L^2(Q)$. Dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet, on ne peut pas découpler aussi facilement l'équation des moments, ce qui rend délicate l'obtention d'une borne L^2 pour h_i. Notons également que le résultat que nous établissons dans cette note complète les travaux de Munoz-Ruiz et al. in [4], où les auteurs obtiennent un résultat d'existence dans le cas monodimensionnel.

Pour démontrer le théorème, nous procédons en trois étapes : en utilisant certaines propriétés des espaces de Hardy, on commence par donner dans le Lemme 2.1 une estimation sur $(u_i\cdot\nabla)u_i$ dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)+L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega)^2)$ en fonction de bornes sur u_i dans $L^2(H^1_0(\Omega)^2)\cap L^\infty(L^2(\Omega)^2)$. Puis, en introduisant l'opérateur de Stokes et en utilisant cette estimation, nous obtenons une borne sur h_i dans $L^2(Q)$ en fonction de bornes sur u_i dans $L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)$ et $h_i\log h_i$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ (Lemma 3.1). Enfin, dans la Section 4, on utilise le Lemme 3.1 pour obtenir les estimations globales d'énergie pour des données contrôlées, ce qui permet de passer à la limite dans les équations.

2. Une estimation sur le terme d'advection $(u_i\cdot\nabla)u_i$

Soit B^x_η la boule de centre $x\in\Omega$ et de rayon η. Dans la suite, on note $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions $f\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ dont la dérivée au sens des distributions est encore dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ l'espace de Hardy défini par

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)=\left\{f\in L^1(\mathbb{R}^2)\mid\sup_{\eta\geqslant0}|h_\eta*f|\in L^1(\mathbb{R}^2)\right\}$$

où $h_\eta(x)=\eta^{-2}h(\frac{x}{\eta})\geqslant0$, appartient à $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ et vérifie : supp $h_\eta(x)\subset B^x_\eta$, $\int_{\mathbb{R}^2}h_\eta(x)\,\mathrm{d}x=1$ (voir Fefferman et Stein [1]). Notons que $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ est un sous espace de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$. Dans [2], les auteurs introduisent des espaces de Hardy définis sur des domaines bornés. Un de ces espaces est :

$$\mathcal{H}^1_z(\Omega)=\left\{f\in L^1(\Omega)\mid f_z\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)\right\}$$

où f_z est le prolongement par 0 de f dans $\mathbb{R}^2$. Toute fonction f de $\mathcal{H}^1_z(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x=0$. On réécrit le terme d'advection sous la forme :

$$u_i\nabla u_{i,l}=\sum_{k=1}^{2}u_{i,k}\frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_l}+(-1)^l u_{i,j}\operatorname{rot}u_i=T_{0,l}+T_{1,l}$$

avec $l\neq j$. On montre alors le résultat suivant :

Lemme 2.1. *$T_{0,l}$ vérifie l'estimation*

$$\|T_{0,l}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leqslant k_0\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)},\tag{2}$$

et on peut décomposer $T_{1,l}$ sous la forme $T_{1,l} = T_{11,l} + T_{12,l}$ avec

$$\|T_{11,l}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant k_1 \|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \|\operatorname{rot} u_i\|^2_{L^2(Q)}, \tag{3}$$

$$\|T_{12,l}\|_{L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))} \leqslant k_2 \|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}, \tag{4}$$

où k_0, k_1 et k_2 sont des constantes strictement positives ne dépendant que des données.

Démonstration. On a $\|u_{i,k}\frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_l}\|_{H^{-1}(\Omega)} = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u^2_{i,k}}{\partial x_l}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}\|(u_{i,k})^2\|_{L^2(\Omega)}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Gagliardo Niremberg, on en déduit la majoration (2). Nous allons à présent estimer $T_{1,l}$ à l'aide des espaces de Hardy. Notons que u_i peut se décomposer sur toute boule B^x_η de la façon suivante :

$$u_i = \nabla p^x_\eta + \operatorname{Rot} q^x_\eta, \quad \text{où } p^x_\eta \in H^1(B^x_\eta) \text{ et } q^x_\eta \in H^1_0(B^x_\eta). \tag{5}$$

Remarque 1. Soient B^x_η et $B^{x'}_{\eta'}$ deux boules telles que $B_\cap = B^x_\eta \cap B^{x'}_{\eta'} \neq \emptyset$. Sur chacune de ces boules u_i peut être décomposé de façon unique en utilisant (5). Il est clair que $\operatorname{Rot} q^x_\eta \neq \operatorname{Rot} q^{x'}_{\eta'}$ sur $B_\cap$, toutefois on a : $\operatorname{rot} u_i = \operatorname{rot}\operatorname{Rot} q^x_\eta = \operatorname{rot}\operatorname{Rot} q^{x'}_{\eta'}$ sur $B_\cap$.

En utilisant la décomposition (5) et la remarque précédente, sur toute boule B^x_η, il vient : $T_{1,l} = -\operatorname{rot}(u_{i,j}\operatorname{Rot} q^x_\eta) + \operatorname{Rot} u_{i,j}\operatorname{Rot} q^x_\eta = A^x_\eta + C^x_\eta$,où A^x_η vérifie $\int_\Omega A^x_\eta\,\mathrm{d}x = 0$ et $A^x_\eta = 0$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\Omega$. Pour établir le résultat annoncé sur $T_{1,l}$, on pose $I_1(x) = h_\eta * A^x_\eta$ et $I_2(x) = h_\eta * (\partial C^x_\eta/\partial y)$. On commence par estimer $I_1(x)$. On a

$$I_1(x) = -\int_{B^x_\eta} \frac{1}{\eta^2}\operatorname{Rot} h\left(\frac{x-y}{\eta}\right) u_{i,j}(y)\frac{\operatorname{Rot} q^x_\eta(y)}{\eta}\,\mathrm{d}y \leqslant D_1\left(\fint_{B^x_\eta} |u_{i,j}|^\beta\right)^{1/\beta}\left(\fint_{B^x_\eta}\left(|\operatorname{Rot} q^x_\eta|\eta^{-1}\right)^{\beta'}\right)^{1/\beta'},$$

avec $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$. De plus, puisque la moyenne de $\operatorname{Rot} q^x_\eta$ est nulle sur B^x_η et sachant que $\operatorname{Rot} q^x_\eta \cdot n = 0$ sur ∂B^x_η, on obtient, en utilisant l'inégalité de Poincaré–Sobolev et la remarque précédente :

$$\left(\fint_{B^x_\eta}\left(|\operatorname{Rot} q^x_\eta|\eta^{-1}\right)^{\beta'}\right)^{1/\beta'} \leqslant D_2\left(\fint_{B^x_\eta} |\operatorname{rot}\operatorname{Rot} q^x_\eta|^\alpha\right)^{1/\alpha} = D_2\left(\fint_{B^x_\eta} |\operatorname{rot} u_i|^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

avec $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\beta'}$. Ainsi, en posant $\sup_{\eta>0}\fint_{B^x_\eta}|f| = M(f)$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, il vient : $\int \sup_{\eta>0}|I_1(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant D_3\|M(|u_{i,j}|^\beta)\|^{1/\beta}_{L^{2/\beta}}\|M(|\operatorname{rot} u_i|^\alpha)\|^{1/\alpha}_{L^{2/\beta}}$. Finalement, si on choisit $\beta < 2$ et $\alpha < 2$, on peut appliquer le théorème du maximum de Hardy–Littlewood, et on obtient $\int \sup_{\eta>0}|I_1(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant D_4\|u_{i,j}\|_{L^2(\Omega)} \times \|\operatorname{rot} u_i\|_{L^2(\Omega)}$. Ainsi, puisque $\mathcal{H}^1_z(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, on obtient (3). En utilisant la même méthode, on peut estimer $\int \sup_{\eta>0}|I_2(x)|\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\|u_i\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}$, et en rappelant que $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, on obtient (4).

3. Une estimation sur h_i dans $L^2(Q)$

Lemme 3.1. *Si les conditions du théorème sont vérifiées, h_1 et h_2 vérifient l'estimation* :

$$\begin{aligned}
\lambda_i \int_\Omega h_i \log h_i + \|h_i\|^2_{L^2(Q)} &\leqslant \mathbb{C}_{0,i} + \frac{1}{4}\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \\
&+ (\mathbb{C}_1\mu_i^2 + 3\mathbb{C}_2)\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)} + \mathbb{C}_3\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)} \\
&+ \mathbb{C}_2\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}\sup_t\int_\Omega h_i\log^+ h_i + \mathbb{C}_4\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}\sup_t\int_\Omega h_i\log^+ h_i,
\end{aligned} \tag{6}$$

où les $\mathbb{C}_k$, $k = 1, \ldots, 4$, et les $\mathbb{C}_{0,i}$, $i = 1, 2$, sont des constantes strictement positives ne dépendant que des données.

Démonstration. Pour obtenir une borne sur h_i dans $L^2(Q)$, on s'inspire des travaux de P.L. Lions dans [3]. On introduit l'opérateur de Stokes $S(\Pi) = p$ où (s, p) est l'unique solution de $-\Delta s + \nabla p = \Pi$ dans Ω, $\operatorname{div} s = 0$ dans Ω, $s = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\int_\Omega p \,\mathrm{d}x = 0$. On sait que S est borné de $W^{-1,r}(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ et de $L^r(\Omega)$ dans $W^{1,r}(\Omega)$ avec $1 < r < \infty$. On pose $p_i = S(-\Delta u_i)$ avec (s_i, p_i) solution de $-\Delta s_i + \nabla p_i = -\Delta u_i$ dans Ω, $s_i = 0$ sur $\partial\Omega$, $\operatorname{div} s_i = 0$ dans Ω, $\int_\Omega p_i = 0$. On peut alors réécrire les équations des moments sous la forme suivante : $-\mu_i \Delta s_i + \nabla(\mu_i p_i - \lambda_i \operatorname{div} u_i + g h_i + g_i h_j) = -\frac{\partial u_i}{\partial t} - (u_i \cdot \nabla) u_i$, ainsi, en notant que $\overline{h_i} = \bar{h}_{i,0}$, il vient :

$$\mu_i p_i - \lambda_i \operatorname{div} u_i + g(h_i - \bar{h}_{i,0}) + g_i(h_j - \bar{h}_{j,0}) = S\left(-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) + S\big(-(u_i \cdot \nabla) u_i\big). \tag{7}$$

En multipliant (7) par h_i et en intégrant sur Q, on obtient :

$$\begin{aligned} g\|h_i\|^2_{L^2(Q)} = \operatorname{mes}(Q)\bar{h}_{i,0}(g\bar{h}_{i,0} + g_i\bar{h}_{j,0}) - g_i \int_Q h_i h_j + \lambda_i \int_Q h_i \operatorname{div} u_i - \mu_i \int_Q p_i h_i \\ + \int_Q S\left(-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) h_i + \int_Q S\big(-(u_i \cdot \nabla) u_i\big) h_i. \end{aligned} \tag{8}$$

Pour obtenir une borne sur h_i dans $L^2(Q)$, nous devons ainsi estimer chaque terme intervenant dans l'Éq. (8). Remarquons tout d'abord que $\int_Q h_i h_j \geqslant 0$, grâce à la positivité de h_1 et h_2. Le troisième terme du membre de droite se traite de la même manière que dans [6] en utilisant l'équation de continuité : $\lambda_i \int_Q h_i \operatorname{div} u_i = -\lambda_i \int_\Omega h_i \log h_i + \lambda_i \int_\Omega h_{i,0} \log h_{i,o}$.

L'opérateur de Stokes étant borné de $H^{-1}(\Omega)^2$ dans $L^2(\Omega)$, on peut majorer $\|p_i\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de $\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)^2}$. Ainsi, en utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on obtient : $-\mu_i \int_Q p_i h_i \leqslant \mathbb{C}_1 \mu_i^2 \times \|u_i\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)} + \frac{\varepsilon}{2}\|h_i\|^2_{L^2(Q)}$.

Le domaine Ω étant indépendant du temps, $S(\frac{\partial u_i}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} S(u_i)$, ainsi il vient :

$$-\int_Q S\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) h_i = -\int_Q h_i \frac{\partial S(u_i)}{\partial t} = -\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega S(u_i) h_i + \int_Q S(u_i) \frac{\partial h_i}{\partial t}. \tag{9}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur de Stokes, on peut raisonner comme dans [5] (page 149, 150) pour estimer le premier terme du membre de droite de (9). Le second terme s'estime en utilisant l'équation de continuité : $\int_Q S(u_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} = \int_Q \nabla S(u_i) u_i h_i \leqslant \|\nabla S(u_i)\|_{L^4(Q)^2} \|u_i\|_{L^4(Q)^2} \|h_i\|_{L^2(Q)}$. Notons que $\|\nabla S(u_i)\|_{L^4(Q)^2} \leqslant \|S(u_i)\|_{W^{1,4}(Q)} \leqslant C'' \|u_i\|_{L^4(Q)^2}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Gagliardo–Niremberg et l'inégalité de Young, on obtient : $\int_Q S(u_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} \leqslant K \|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \|u_i\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)} + \frac{\varepsilon}{2}\|h_i\|^2_{L^2(Q)}$.

Il nous reste à estimer le dernier terme du membre de droite de (8). Pour cela, on utilise le résultat obtenu dans la Section 2 comme suit :

$$-\int_Q S\big((u_i \cdot \nabla) u_i\big) h_i = -\int_Q S(T_0) h_i - \int_Q S(T_{11}) h_i - \int_Q S(T_{12}) h_i. \tag{10}$$

Pour estimer le premier terme de (10), on note que : $-\int_Q S(T_0) h_i \leqslant \int_0^T \|S(T_0)\|_{L^2(\Omega)} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \int_0^T \|T_0\|_{H^{-1}(\Omega)^2} \|h_i\|_{L^2(\Omega)}$, puis en utilisant l'inégalité de Young et la majoration (2), il vient : $-\int_Q S(T_0) h_i \leqslant$

$\frac{k_0C^2}{2\varepsilon}\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)} + \frac{\varepsilon}{2}\|h_i\|^2_{L^2(Q)}$. Le deuxième terme s'estime de la même façon avec l'inégalité (3). Pour terminer, on traite le dernier terme de (10). On introduit les espaces de Orlicz $L_{\mathcal{A}}(\Omega)$, $L_{\mathcal{A}'}(\Omega)$ et $L_{\tilde{\mathcal{A}}'(\Omega)}$ où $\mathcal{A}$ est la N-fonction définie par $\mathcal{A}(t)=\exp(t^2)-1$ et $\mathcal{A}'$ est la N-fonction omplémentaire à $\mathcal{A}$, équivalente à la N-fonction $\tilde{\mathcal{A}}'$ définie par $\tilde{\mathcal{A}}'(t)=t\sqrt{\log^+(t)}$. On obtient, en utilisant le fait que $\|S(T_{12}\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)}\leqslant k\|S(T_{12}\|_{H^1(\Omega)}\leqslant kC'\|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2}$:

$$-\int_0^T\int_\Omega S(T_{12})h_i\leqslant 2\int_0^T\big\|S(T_{12}\big\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)}\|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\leqslant K_1\int_0^T\|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2}\left(1+\int_\Omega h_i\sqrt{\log^+h_i}\right)\mathrm{d}t,$$

puis en remarquant que $W^{1,1}(\Omega)^2\subset L^2(\Omega)^2$ et en utilisant la majoration (4) on aboutit à : $-\int_0^T\int_\Omega S(T_{12})h_i\leqslant K_2\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}+K_2\int_0^T\|u_i\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}(\int_\Omega h_i\sqrt{\log^+h_i})\,\mathrm{d}t$. Ainsi, en notant que $\int_\Omega h_i\sqrt{\log^+h_i}\leqslant\frac12(\int_\Omega\sqrt{h_i}\sqrt{\log^+h_i})^2+\frac12\leqslant\frac12\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}\int_\Omega h_i\log^+h_i+\frac12$, on obtient : $-\int_Q S(T_{12})h_i\leqslant 3\mathbb{C}_2\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}+\mathbb{C}_2\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}\sup_t\int_\Omega h_i\log^+h_i$.

4. Estimation a priori et démonstration du théorème

Les résultats précédents nous permettent d'établir les estimations globales d'énergie. On multiplie (1) par une constante δ suffisamment grande et on intègre sur $(0,t)$. Puis en ajoutant (6), $i=1,2$, et en écrivant : $\delta g_i(h_j,\operatorname{div}u_i)\leqslant\varepsilon'\|h_j\|^2_{L^2(\Omega)}+K_{\varepsilon'}\delta^2g_i^2\|\operatorname{div}u_i\|^2_{L^2(\Omega)}$, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}-\frac{\mathbb{D}_{1,1}+\mathbb{D}_{1,2}}{e}\operatorname{mes}(\Omega)\leqslant\sum_{i=1}^2\Bigg[&\left(\frac{\delta}{2}-\frac14\right)\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}+\big(\mathbb{D}_{1,i}-\mathbb{C}_4\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}\big)\sup_t\int_\Omega h_i\log^+h_i\\&-\mathbb{D}_{1,i}\sup_t\int_\Omega h_i\log^-h_i+\mathbb{D}_{2,i}\|\operatorname{div}u_i\|^2_{L^2(Q)}+\Bigg(\mathbb{D}_{3,i}-\frac{\delta C_{GN}}{2}\|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}\\&-\mathbb{C}_3\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}-\mathbb{C}_2\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}\sup_t\int_\Omega h_i\log^+h_i\Bigg)\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}\\&+(1-\varepsilon')\|h_i\|^2_{L^2(Q)}\Bigg]\leqslant\mathbb{D}_0,\end{aligned}\tag{11}$$

où $\mathbb{D}_{1,i}=\delta g+\lambda_i$, $\mathbb{D}_{2,i}=\delta\lambda_i-K_{\varepsilon'}\delta^2g_i^2$, $\mathbb{D}_{3,i}=\delta\mu_i-\mathbb{C}_1\mu_i^2-3\mathbb{C}_2$, et $\mathbb{D}_0$ ne dépendent que des données initiales. En prenant δ suffisamment grand, on peut alors vérifier que les quantités précédant les termes $\|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega)^2)}$, $\sup\int_\Omega h_i\log^+h_i$ et $\|\operatorname{div}u_i\|^2_{L^2(Q)}$ sont positives pour des λ_i assez grands et pour des données initiales petites. On termine ainsi la preuve du théoreme en construisant des solutions approchées vérifiant ces estimations et en passant à la limite de la même manière que dans [5].

Références

[1] C. Fefferman, E. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 228 (1972) 137–193.
[2] J. Hogan, C. Li, A. McIntosh, K. Zhang, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire 17 (2000) 193–217.
[3] P.-L. Lions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 328 (1999) 659–662.
[4] M.L. Munoz-Ruiz, M.J. Castro-Diaz, C. Pares, Nonlinear Anal. 53 (2003) 567–600.
[5] M.L. Munoz-Ruiz, F.J. Chatelon, P. Orenga, On a bi-layer shallow water problem, Nonlinear Anal. 4 (2003) 139–171.
[6] P. Orenga, Arch. Rational Mech. Anal. 130 (1995) 183–204.