Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 747–750

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Résolution du problème des arcs de Nash pour les points doubles rationnels D_n

Camille Plénat

Département de mathématiques, faculté des sciences du Maine, 72085 Le Mans cedex 9, France

Reçu le 24 janvier 2005 ; accepté après révision le 13 avril 2005

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Cette Note a pour objet le problème des arcs de Nash, selon lequel il y aurait autant de familles d'arcs sur un germe de surface singulier U que de composantes essentielles d'une désingularisation de cette singularité. On résout le problème par l'affirmative pour les points doubles rationnels D_n $(n \geqslant 4)$. ***Pour citer cet article : C. Plénat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

A solution to the Nash problem of arcs for rational double points D_n. This Note deals with the Nash problem, which claims that there are as many families of arcs on a singular germ of surface U as there are essential components of the exceptional divisor in the desingularisation of this singularity. We prove that this claim holds for the rational double points D_n $(n \geqslant 4)$. ***To cite this article: C. Plénat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

A la fin des années soixante, Nash a introduit l'étude de l'espace des arcs $\mathcal{H}$ tracés sur une variété singulière S, ayant pour origine un point singulier de celle-ci, dans un préprint non publié à l'époque (mais paru depuis [5]). Un arc est un k-morphisme $\phi : \operatorname{spec} k[[t]] \to S$ et $\phi(0)$ est appelé son origine. Il a notamment posé le problème suivant :

Problème 1.1 (Nash). *Y a-t-il autant de courbes exceptionnelles dans la* **désingularisation minimale** *d'une singularité de surface normale* (S, s) *que de composantes irréductibles de* $\mathcal{H}$ *?*

Adresse e-mail : camille.plenat@univ-lemans.fr (C. Plénat).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.023

Ces composantes irréductibles coincident avec les familles d'arcs telles qu'elles sont définies par Nash dans [5].

Or Nash a défini l'application $M:\{\text{familles d'arcs}\} \to \{\text{composantes irréductibles du diviseur exceptionnel}\}$ qui associe au point générique d'une famille d'arcs le diviseur irréductible exceptionnel sur lequel l'arc se relève et il a montré que cette application était injective [2,5] ; il suffit donc de démontrer que c'est une bijection pour résoudre le problème.

Soit $\bigcup E_\alpha$ l'image inverse du point singulier s dans la désingularisation minimale de S, où les E_α sont les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel. On utilise la décomposition canonique de l'espace des arcs, $\mathcal{H} = \bigcup \overline{N_\alpha}$ où N_α est la famille des arcs tels que leur transformée stricte est transverse à E_α et n'intersecte aucun E_β, $\beta \neq \alpha$ (ces familles sont des ensembles irréductibles de $\mathcal{H}$ (cf. [3,9])). Par construction, il y a autant d'ensembles irréductibles $\overline{N}_\alpha$ que de diviseurs exceptionnels ; donc le problème de Nash se ramène à montrer que $\overline{N_\alpha} \not\subset \overline{N_\beta}$ pour tout couple $\alpha \neq \beta$.

Remarque 1. Pour résoudre le problème des arcs de Nash, on peut aussi considérer l'ensemble des arcs tronqués « suffisamment » loin. Si on montre que pour un certain i les familles « tronquées » à l'ordre i sont non incluses les unes dans les autres, on aura résolu le problème de Nash (voir preuve facile dans [9]).

Afin de résoudre un certain nombre de non-inclusions, on applique d'abord le critère valuatif suivant, suffisant pour distinguer certaines familles (cf. [6]) et qui (dans le cas des singularités rationnelles) permet d'ordonner partiellement les familles d'arcs.

Lemme 1.2 (Critère valuatif). *Soit $(S,0)$ une singularité normale de surface. Soient $p:(X,(E_j)) \to (S,0)$ une désingularisation de $(S,0)$, E_i, E_j deux composantes irréductibles de $p^{-1}(0)$.*

S'il existe $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$ telle que $\mathrm{ord}_{E_i}(f) < \mathrm{ord}_{E_j}(f)$, alors $\overline{N_i}(S) \not\subset \overline{N_j}(S)$.

L'ordre partiel induit par cette condition sur les familles d'arcs est le suivant : « $\overline{N_\alpha} < \overline{N_\beta}$ » si pour tout $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$, $\mathrm{ord}_{E_\alpha}(f) \leqslant \mathrm{ord}_{E_\beta}(f)$ et il existe $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$ telle que l'inégalité est stricte. Si aucune des inégalités « $\overline{N_\alpha} < \overline{N_\beta}$ » et « $\overline{N_\beta} < \overline{N_\alpha}$ » ne sont satisfaites, alors on dit que les familles sont incomparables.

Quelques avancées ont été réalisées : Reguera (dans [9]) a répondu par l'affirmative pour les singularités minimales de surface. Plus récemment, Ishii et Kollar ont obtenu une réponse positive au problème posé par Nash dans [5] pour les singularités toriques et ont donné un « contre-exemple » en dimension supérieure ou égale à quatre (cf. [2]). Pour le problème de Nash pour les singularités sandwich, on peut voir les articles [4,10] ou pour une solution partielle l'article [1]. Enfin, en 2004, avec Popescu-Pampu, nous avons trouvé une nouvelle classe de singularités de surface normales non rationnelles pour lesquelles le problème trouve une solution affirmative (cf. [8]).

Dans cette Note, on donne une preuve (dont on donne plus de détails dans [7]) pour les points doubles rationnels de surface D_n $(n \geqslant 4)$.

2. Les points doubles rationnels D_n

On va considérer la singularité D_n plongée dans $\mathbb{C}^3$, définie par l'équation $f = z^2 - x(y^2 + x^{n-2}) = 0$; son graphe dual de résolution (pour n pair) est décrit sur la Fig. 1. La donnée d'un arc d'origine 0 sur la singularité D_n est équivalente à la donnée de trois séries formelles :

$$x(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots,$$
$$y(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \cdots,$$
$$z(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

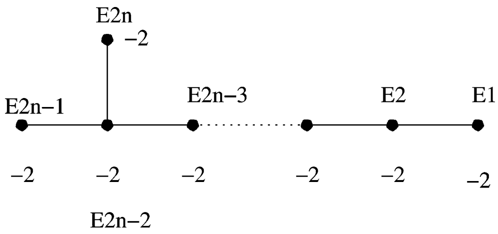

Fig. 1. Graphe dual (singularité de type D_{2n}).

dont les coefficients sont soumis aux contraintes $f_j = 0$ où f_j est le coefficient de t^j dans $f(x(t), y(t), z(t))$. On va appeler I l'idéal engendré par ces coefficients.

On va montrer que le problème de Nash est vrai pour les singularités D_{2n} , la généralisation à D_{2n+1} étant immédiate (il suffit d'interchanger les fonctions régulières $y + \mathrm{i}x^{n-1}$ et $y - x^{n-1}$ avec $z + \mathrm{i}x^n$ et $z - \mathrm{i}x^n$).

Théorème 2.1. *Le problème trouve une solution affirmative pour les points doubles rationnels D_{2n}.*

Démonstration. On tronque les arcs à l'ordre $4n - 1$. La preuve se fait en deux étapes, qui font l'objet des deux sections suivantes.

2.1. Critère valuatif appliqué aux D_{2n}

Pour tout $i \geqslant 1$, on désigne par $N_\alpha(i)$ la famille des troncations à l'ordre i des arcs dans N_α et par $\overline{N_\alpha(i)}$ son adhérence dans la topologie de Zariski.

On applique le critère où on prend pour f les fonctions x, y, z ainsi que des fonctions $y - \mathrm{i}x^{n-1}$ et $y + \mathrm{i}x^{n-1}$, cela nous donne les non-inclusions suivantes :

- $\overline{N_{2n-1-k}(4n-1)} \not\subset \overline{N_{2n-1-l}(4n-1)}$ pour $1 \leqslant l < k \leqslant 2n-2$ (1)
- $\overline{N_{2n-1-k}(4n-1)} \not\subset \overline{N_{2n-1}(4n-1)}, \overline{N_{2n}(4n-1)}$ pour $n \leqslant k \leqslant 2n-2$
- $\overline{N_{2n-1}(4n-1)}, \overline{N_{2n}(4n-1)} \not\subset \overline{N_{2n-1-k}(4n-1)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-2$
- $\overline{N_{2n-1}(4n-1)} \not\subset \overline{N_{2n}(4n-1)}$ et $\overline{N_{2n}(4n-1)} \not\subset \overline{N_{2n-1}(4n-1)}$.

Il nous reste à démontrer les non-inclusions non prouvées par le critère, paires par paires.

2.2. Démonstration des non-inclusions restantes

Soient $\overline{N_k(4n-1)}$ et $\overline{N_l(4n-1)}$ deux familles d'arcs telles que $\overline{N_k(4n-1)} \not\subset \overline{N_l(4n-1)}$. Alors $P_l \not\subset P_k$ où $V(P_k) = \overline{N_k(4n-1)}$ et $V(P_l) = \overline{N_l(4n-1)}$. On veut montrer la non-inclusion réciproque, c'est-à-dire on veut trouver un élément de P_k n'appartenant pas à P_l.

Que sait-on à propos de l'idéal P_l ? Tout d'abord, on connait les valuations ord_{E_l} associées au diviseur E_l des fonctions x, y et z. Alors on a $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ord}_{E_l}(x)-1}, b_1, \ldots, b_{\mathrm{ord}_{E_l}(y)-1}, c_1, \ldots, c_{\mathrm{ord}_{E_l}(z)-1} \in P_l$, ainsi que $I_l = I \cap \mathbb{C}[a_1, \ldots, c_{4n-1}] \cap (a_1, \ldots, a_{\mathrm{ord}_{E_l}(x)-1}, b_1, \ldots, b_{\mathrm{ord}_{E_l}(y)-1}, c_1, \ldots, c_{\mathrm{ord}_{E_l}(z)-1})$. On sait en plus que $a_{\mathrm{ord}_{E_l}(x)}, b_{\mathrm{ord}_{E_l}(y)}, c_{\mathrm{ord}_{E_l}(z)} \notin P_l$. Il en est de même pour P_k.

Pour résumer la situation, on connait deux listes d'éléments L_l, L_k appartenant respectivement aux idéaux P_l et P_k, et une liste pour chacun d'eux, M_l, M_k ($M_l = a_{\mathrm{ord}_{E_l}(x)}, b_{\mathrm{ord}_{E_l}(y)}, c_{\mathrm{ord}_{E_l}(z)}$) d'éléments ne leur appartenant pas.

Soit $d \in M_k$. Soit $(I_k : d^\infty)$ la saturation de I_k par d. On montre que $(I_k : d^\infty) \subset P_k$.

Puis on raisonne de la manière suivante :

On suppose par absurde que $P_k \subset P_l$ dans $\mathbb{C}[a_1, \ldots, c_{4n-1}]$. Soit S la normalisation de l'anneau $\frac{\mathbb{C}[a_1,\ldots,c_{4n-1}]}{P_k \cap P_l}$. On choisit un idéal premier Q_k au-dessus de P_k . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\frac{P_k}{J} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \frac{P_l}{J} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \frac{\mathbb{C}[a_1,\ldots,c_{4n-1}]}{J} \arrow[d] \\
Q_k \arrow[r, phantom, "\subset"] & Q_l \arrow[r, phantom, "\subset"] & S
\end{tikzcd}$$

où $J = P_k \cap P_l$. On montre que quel que soit Q_l au-dessus de P_l, on ne peut avoir l'inclusion $(I_k : d^\infty)S \subset Q_l$ ce qui fournit la contradiction désirée.

La partie la plus technique de la démonstration est le calcul de la saturation $(I_k : d^\infty)$ (voir [7]).

Remerciements

Je remercie en premier lieu M. Spivakovsky pour son aide et ses encouragements. Je remercie aussi M. Lejeune-Jalabert et P. Popescu-Pampu qui par leurs questions et observations m'ont amené à préciser plus d'un point.

Références

[1] J. Fernandez-Sanchez, Equivalence of the Nash conjecture for primitive and sandwiched singularities, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005) 677–679.
[2] S. Ishii, J. Kollár, The Nash problem on arc families of singularities, math.AG/0207171.
[3] M. Lejeune-Jalabert, Courbes tracées sur un germe d'hypersurface, Amer. J. Math. 112 (1990) 525–568.
[4] M. Lejeune-Jalabert, A. Reguera, Arcs and wedges on sandwiched surface singularities, Amer. J. Math. 121 (1999) 1191–1213.
[5] J.F. Nash Jr., Arc structure of singularities. A celebration of John F. Nash, Jr., Duke Math. J. 81 (1) (1995) 31–38.
[6] C. Plénat, A propos du problème des arcs de Nash, a paraître dans l'I.F.A., vol. 55.
[7] C. Plénat, Résolution du problème des arcs de Nash pour les points doubles rationnels, Thèse.
[8] C. Plénat, P. Popescu-Pampu, A class of non-rational surface singularities for which the Nash map is bijective, math.AG/0410145.
[9] A. Reguera, Families of arcs on rational surface singularities, Manuscripta Math. 88 (3) (1995) 321–333.
[10] A. Reguera, Image of the Nash map in terms of wedges, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 385–390.