Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 21–24
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Invariant de Serre et fibre de Milnor analytique

Johannes Nicaise [a], Julien Sebag [b]

[a] *KU Leuven, Departement de mathématiques, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven, Belgique*
[b] *Université Bordeaux I, institut mathématique de Bordeaux, laboratoire A2X, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France*

Reçu le 7 mars 2005 ; accepté après révision le 4 mai 2005

Disponible sur Internet le 22 juin 2005

Présenté par Laurent Lafforgue

Résumé

Soit R un anneau de valuation discrète complet d'égales caractéristiques. Nous étudions le comportement des invariants de Serre motiviques (dont nous raffinons la définition) après extension finie de R. Nous établissons une formule de trace, qui donne une interprétation cohomologique des invariants de Serre, en termes des nombres de Lefschetz de la monodromie sur les cycles proches. ***Pour citer cet article : J. Nicaise, J. Sebag, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

The Serre invariant and the analytic Milnor fiber. In this Note, we refine the notion of motivic Serre invariants. We study the behaviour of these invariants under ramification. We establish a trace formula, which yields a cohomological interpretation of the motivic Serre invariants, in terms of the Lefschetz numbers of the monodromy action on the nearby cycles. ***To cite this article: J. Nicaise, J. Sebag, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Le schéma des arcs est au cœur de la « conjecture de la monodromie », qui prédit une relation entre la fonction zêta motivique naïve d'une $\mathbb{C}[t]$-variété régulière, et l'action de la monodromie sur les cycles proches sur la fibre au-dessus de l'origine. Définis dans [8], les invariants de Serre motiviques sont des classes de motifs virtuels, qui s'obtiennent (par analogie avec le cas localement compact) comme des intégrales de formes jauges calculées sur des espaces analytiques rigides lisses. Dans cette Note, à l'aide de ces invariants de Serre et de la cohomologie étale de Berkovich des espaces analytiques non-archimédiens [2], nous tâchons d'établir un lien direct entre la fonction zêta motivique, et la monodromie, en introduisant la fibre de Milnor analytique. Nous établissons une formule de

Adresses e-mail : johannes.nicaise@wis.kuleuven.ac.be (J. Nicaise), julien.sebag@math.u-bordeaux1.fr (J. Sebag).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.05.007

trace, qui donne une interprétation cohomologique des invariants de Serre motiviques, en termes des nombres de Lefschetz de la monodromie sur les cycles proches.

Les résultats annoncés dans cette note feront partie de l'article [9], en cours de préparation.

2. Invariants de Serre et ramification

On suppose que k est un corps parfait, que $R = k[[t]]$ et $K = k((t))$. Dans cette Note, X_∞ est un R-schéma formel, plat, topologiquement de type fini et séparé, de fibre générique X_η lisse sur K, et de fibre spéciale X_s. On désigne par $\mathrm{Sm}(X_\infty)$ l'ensemble des points de X_∞ où le morphisme structural $X_\infty \to \operatorname{Spec} R$ est lisse, et par $\mathrm{Sg}(X_s)$ le complémentaire dans X_s des points réguliers.

Soit Z un k-schéma réduit, séparé et de type fini. On appelle *anneau de Grothendieck des Z-variétés* le groupe $K_0(\mathrm{Var}_Z)$ défini comme le groupe abélien engendré par les symboles $[X]$ des Z-variétés (i.e. des schémas réduits, séparés et de type fini sur Z) et par les relations : $[X] = [Y]$, si X et Y sont Z-isomorphes, et $[X] = [Y] + [X \backslash Y]$, si Y est fermée dans X. Le produit $[X][Y] := [(X \times_Z Y)_{\mathrm{red}}]$ donne à $K_0(\mathrm{Var}_Z)$ une structure d'anneau. Si $Z = \operatorname{Spec} k$, on écrit $K_0(\mathrm{Var}_k)$, et on note $\mathbf{L}$ le symbole $[\mathbb{A}^1_k]$. Dans [8], F. Loeser et le second auteur ont montré comment associer à un K-espace analytique rigide X, quasi-compact, séparé et lisse sur K, muni d'une forme jauge ω, l'élément $\int_X |\omega| \in K_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbf{L}^{-1}]$, via l'intégration motivique. Une propriété remarquable de cette intégrale motivique est que sa classe modulo $(\mathbf{L} - 1)$ ne dépend plus du choix de ω. Par analogie avec le cas localement compact, cette classe, notée $S(X)$, est appelée *invariant de Serre motivique*.

Remarque 1. En réalité (cf. [8]) il n'est pas nécessaire de disposer d'une forme jauge. L'existence locale des formes jauges et les bonnes propriétés d'additivité de l'intégrale motivique permettent d'associer un tel élément $S(X)$ à la seule donnée d'un K-espace analytique rigide quasi-compact, séparé et lisse sur K.

Si X_η est un K-espace analytique rigide quasi-compact, séparé et lisse sur K, il découle des constructions de l'intégrale motivique et de l'invariant de Serre motivique (cf. [8]) que l'on peut, sans plus d'efforts, définir un invariant de Serre rélatif universel $S_{\mathrm{rel}}(X_\eta)$ dans

$$\varprojlim_{X_\infty} K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s},$$

où X_∞ parcourt le système projectif des R-modèles formels de X_η, ordonné par les éclatements admissibles, et où I_{X_s} est l'idéal de $K_0(\mathrm{Var}_{X_s})$ engendré par $([\mathbf{A}^1_{X_s}] - [X_s])$ (X_s est ici munie de sa structure réduite). Pour chaque modèle X_∞, on note $S(X_\infty)$ la projection de $S_{\mathrm{rel}}(X_\eta)$ sur $K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s}$.

Remarque 2. Le morphisme d'« oubli » $K_0(\mathrm{Var}_{X_s}) \to K_0(\mathrm{Var}_k)$ spécialise $S(X_\infty)$ en $S(X_\eta)$, pour tout R-modèle X_∞ de X_η.

Rappelons que l'invariant de Serre se réalise comme la classe de la fibre spéciale d'un modèle de Néron faible de X_η (cf. [3]). En particulier, si $U_\infty \to X_\infty$ est un R-modèle de Néron faible de X_η, on obtient de même $S(X_\infty) = [U_s] \in K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s}$.

Définition 2.1. Si V est une sous-k-variété de X_s, on définit l'invariant de Serre à support dans V par $S_V(X_\infty) := [U_s \cap h^{-1}(V)] \in K_0(\mathrm{Var}_V)$, où U_s est la fibre spéciale d'un R-modèle de Néron faible $h : U_\infty \to X_\infty$ de X_η. Cette définition ne dépend pas du choix de U_∞.

Exemple 1. Si X_∞ est un R-modèle régulier de X_η, l'immersion ouverte $\mathrm{Sm}(X_\infty) \to X_\infty$ est un R-modèle de Néron faible de X_η. Donc, si x un point fermé de X_s, régulier, $S_x(X_\infty) = 1$. Au contraire, si x est singulier, $S_x(X_\infty) = 0$.

Proposition 2.2. *Soit R'/R est une extension finie totalement ramifiée, de corps des fractions K'. Supposons que* $\mathrm{Sm}(X_\infty)$ *est un R-modèle de Néron faible de X_η. Il existe une suite d'éclatements formels admissibles $\pi^{(i)}: X_\infty^{(i+1)} \to X_\infty^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n-1$, de centre $C(i)$ et de diviseur exceptionnel $E(i)$, telle que $X_\infty^{(0)} = X_\infty \times_R R'$, et telle que* $\mathrm{Sm}(X_\infty^{(n)})$ *est un R'-modèle de Néron faible de $X_\eta \times_K K'$. De plus, on a*

$$S(X_\infty \times_R R') - S(X_\infty) = \sum_{i=0}^{n-1} \big([E(i)] - [C(i)]\big) + \big([\mathrm{Sg}(X_s)] - [\mathrm{Sg}(X_{\mathrm{s}}^{(n)})]\big) \in K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s}.$$

En particulier, cette formule ne dépend pas du choix d'une telle lissification.

On dit qu'un R-schéma formel X_∞ est *algébrisable*, s'il existe un R-schéma plat, séparé et de type fini X, tel que X_∞ est isomorphe au complété t-adique de X. Si la caractéristique de k est nulle, et X_∞ est algébrisable, on peut toujours dominer X_∞ par un modèle régulier X'_∞ de X_η, tel que la fibre speciale X'_s est un diviseur à croisements normaux strict, grâce à la résolution de singularités plongée de Hironaka pour les schémas excellents (cf. [7] ou [6] pour un énoncé du résultat).

Théorème 2.3. *Supposons que le corps k est de caractéristique nulle. Soient X_η un K-espace analytique rigide quasi-compact, séparé et lisse sur K, X_∞ un R-modèle plat de X_η, et, pour tout entier $e > 0$, K_e/K l'unique extension totalement ramifiée de degré e. On note R_e son anneau des entiers. On suppose que X_∞ est algébrisable et régulier, et que $X_s := \sum_{i\in I} N_i E_i$ est un diviseur à croisements normaux stricts.*

(i) *pour chaque $i \in I$, il existe un revêtement étale $\widetilde{E}_i^\circ$ de $E_i^\circ := E_i \setminus (\bigcup_{j\in I, j\neq i} E_j)$ de degré N_i, tel que, pour chaque entier $e > 0$,*

$$S(X_\infty \times_R R_e) = \sum_{i\in I, N_i|e} [\widetilde{E}_i^\circ] \in K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s}.$$

(ii) *Avec les notations de* (i),

$$S(X_\infty, T) := \sum_{e>0} S(X_\infty \times_R R_e) T^e = \sum_{i\in I} [\widetilde{E}_i^\circ] \frac{T^{N_i}}{1 - T^{N_i}} \in \big(K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s}\big)[[T]].$$

Le point (ii) du théorème précédent permet d'associer un invariant de Serre à $X_\eta \hat{\times}_K \widehat{K^s}$ ($\widehat{K^s}$ étant le complété de la clôture séparable K^s de K) que l'on définit par $S(X_\infty, \widehat{K^s}) := -\lim_{T\to+\infty} S(X_\infty, T)$. L'image de $S(X_\infty, \widehat{K^s})$ dans $K_0(\mathrm{Var}_k)/(\mathbf{L} - 1)$ ne dépend que de X_η. De même, on peut définir $S_V(X_\infty, T)$ et $S_V(X_\infty, \widehat{K^s})$, pour toute sous-$k$-variété V de X_s.

La construction des revêtements $\widetilde{E}_i^\circ$ est analogue à celle de [5], 3.3, où sont étudiées des variétés sur $k[t]$. En particulier, si X est une $k[t]$-variété régulière, plate sur l'origine, et X_η est la fibre générique du complété t-adique X_∞ de X, la série $S(X_\infty, T)$ s'identifie à l'image de la fonction zêta motivique de X [5], 3.2.1, dans $(K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s})[[T]]$, et $S(X_\infty, \widehat{K^s})$ coïncide avec les cycles proches motiviques [5], 3.5.2, dans $K_0(\mathrm{Var}_{X_s})/I_{X_s}$. La série zêta motivique se réalise donc comme une série zêta de Weil de la fibre générique X_η, et les cycles proches motiviques comme l'invariant de Serre de $X_\eta \hat{\times}_K \widehat{K^s}$.

3. Formule de trace et fibre de Milnor

On suppose que le corps k est de caractéristique nulle, algébriquement clos, et que le schéma formel X_∞ est le complété t-adique d'une R-variété plate et génériquement lisse X. Nous fixons un nombre premier ℓ. On appelle *caractéristique d'Euler topologique d'une k-variété Z* l'entier $\chi_{\mathrm{top}}(Z) := \sum_i (-1)^i \dim H_c^i(Z, \mathbf{Q}_\ell)$. Comme, pour toute k-variété Y, $\chi_{\mathrm{top}}(\mathbf{A}^1_Y) = \chi_{\mathrm{top}}(Y)$, χ_{top} induit un morphisme d'anneaux $\chi_{\mathrm{top}} : K_0(\mathrm{Var}_Y)/I_Y \to \mathbf{Z}$. Si $\mathfrak{X}$ est un espace analytique (au sens de [2]), on note $H(\mathfrak{X})$ l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_i H^i(\mathfrak{X}, \mathbf{Q}_\ell)$, où les $H^i(\mathfrak{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont les $\mathbf{Q}_\ell$-modules de cohomologie étale ℓ-adique de $\mathfrak{X}$. On désigne par $\chi_{\text{ét}}(\mathfrak{X})$ la caractéristique d'Euler de $H(\mathfrak{X})$.

Si x est un point fermé de X_s, on note $\mathcal{F}_x$ le tube $]x[\, \subset X_\eta$. Nous appellons cet espace analytique la *fibre de Milnor analytique en x de X_∞*. Par les théorèmes de comparaison de Berkovich, on a des isomorphismes canoniques $H^i(\,]x[\,\hat{\times}_K \widehat{K^s}, \mathbf{Q}_\ell) \cong R^i\psi_\eta(\mathbf{Q}_\ell)_x$, où $R\psi_\eta$ est le foncteur dérivé des cycles proches sur X, et ces isomorphismes respectent l'action de $G(K^s/K)$. Par le Théorème 2.3, si X est une $k[t]$-variété régulière, plate sur l'origine, la série génératrice $S_x(X_\infty, T)$ est égale à la série zêta motivique locale de X en x, et $S_x(X_\infty, \widehat{K^s})$ est égal à la fibre de Milnor motivique de X en x [5], 3.5.3.

Théorème 3.1 (formule de trace). *On suppose que k est algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit X_∞ un R-schéma formel algébrisable, séparé, plat et de type fini, dont la fibre générique X_η est lisse sur K. Soit φ un générateur topologique du groupe de Galois absolu* $\mathrm{Gal}(K^s, K)$. *Soit $Z \subset X_s$ une sous-k-variété de X_s, propre sur k. Si $]Z[\, \subset X_\eta$ désigne le tube de Z dans X_∞, alors, pour tout entier $e > 0$,*

$$\chi_{\mathrm{top}}\big(S_Z(X_\infty \times_R R_e)\big) = \mathrm{Tr}\big(\varphi^e \,|\, H\big(\,]Z[\,\hat{\times}_K \widehat{K^s}\big)\big).$$

Corollaire 3.2. *On garde les notations et les hypothèses ci-dessus. Soient $h : X' \to X$ une résolution plongée des singularités de (X, X_s) telle que $X'_s = \sum_{i\in I} N_i E_i$, et $x \in X_s$ un point fermé.*

(i) $\chi_{\text{ét}}(\mathcal{F}_x \hat{\times}_K \widehat{K^s}) = \chi_{\mathrm{top}}(S_x(X_\infty, \widehat{K^s})) = \sum_{i\in I} N_i\, \chi_{\mathrm{top}}(E_i^\circ \cap h^{-1}(x))$;

(ii) (*Denef–Loeser* [4] *ou* [5], 3.5.2) *soient $k = \mathbf{C}$, et $f : X \to \mathrm{Spec}\, k[t]$ une $k[t]$-variété régulière, plate sur l'origine. Notons F_x la fibre de Milnor topologique de f en x, et M l'action de la monodromie sur la cohomologie singulière $H_{\mathrm{sing}}(F_x, \mathbf{C})$. Pour tout entier $e > 0$, on définit $\mathfrak{X}_{e,1,x}$ comme la k-variété $\{\varphi \in \mathfrak{L}_e(X) \mid \varphi(0) = x$ et $f(\varphi(t)) = t^e \bmod t^{e+1}\}$, où $\mathfrak{L}_e(X)$ est l'espace des e-jets tracés sur X (cf.* [5]). *Alors* $\chi_{\mathrm{top}}(\mathfrak{X}_{e,1,x}) = \mathrm{Tr}(M^e \,|\, H_{\mathrm{sing}}(F_x, \mathbf{C}))$.

(iii) (*A'Campo* [1]) *Avec les hypothèses et notations de* (ii),

$$\mathrm{Tr}\big(M^e \,|\, H_{\mathrm{sing}}(F_x, \mathbf{C})\big) = \sum_{i\in I,\, N_i | e} N_i\, \chi_{\mathrm{top}}\big(E_i^\circ \cap h^{-1}(x)\big).$$

Remerciements

Le premier auteur tient à remercier Luc Illusie et Vladimir Berkovich, qui ont eu la gentillesse de répondre à ses questions, permettant ainsi de donner cette version améliorée des résultats. Les auteurs remercient François Loeser pour les discussions enrichissantes qu'ils ont eues avec lui.

Références

[1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie, Comment. Math. Helv. 50 (1975) 233–248.
[2] V.G. Berkovich, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. 78 (1993) 5–171.
[3] S. Bosch, K. Schlöter, Néron models in the setting of formal and rigid geometry, Math. Ann. 301 (2) (1995) 339–362.
[4] J. Denef, F. Loeser, Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs, Topology 41 (5) (2002) 1031–1040.
[5] J. Denef, F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties, Progr. Math. 201 (2001) 327–348.
[6] J. Giraud, Résolution des singularités (d'après Heisuke Hironaka) [Resolution of singularities (after Heisuke Hironaka)], in : Séminaire Bourbaki, vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. 101–113 (in French).
[7] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, Ann. of Math. 79 (2) (1964) 109–326.
[8] F. Loeser, J. Sebag, Motivic integration on smooth rigid varieties and invariants of degenerations, Duke Math. J. 119 (2003) 315–344.
[9] J. Nicaise, J. Sebag, The Serre invariant, ramification, and the analytic Milnor fiber, en préparation.