

Numerical Analysis

Two-grid finite element scheme for the fully discrete time-dependent Navier–Stokes problem

Hyam Abboud^{a,b}, Vivette Girault^a, Toni Sayah^b

^a *Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France*

^b *Faculté des sciences, université Saint-Joseph, B.P. 11-514 Riad El Solh, Beyrouth 1107 2050, Liban*

Received 28 January 2005; accepted after revision 19 July 2005

Available online 13 September 2005

Presented by Olivier Pironneau

Abstract

In this Note, we study a two-grid scheme fully discrete in time and space for solving the Navier–Stokes system. In the first step, the fully non-linear problem is discretized in space on a coarse grid with mesh-size H and time step k . In the second step, the problem is discretized in space on a fine grid with mesh-size h and the same time step, and linearized around the velocity u_H computed in the first step. The two-grid strategy is motivated by the fact that under suitable assumptions, the contribution of u_H to the error in the non-linear term, is measured in the L^2 norm in space and time, and thus has hopefully a higher-order than if it were measured in the H^1 norm in space. We present the following results: if $h = H^2 = k$, then the global error of the two-grid algorithm is of the order of h , the same as would have been obtained if the non-linear problem had been solved directly on the fine grid. **To cite this article:** *H. Abboud et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Schéma à deux grilles pour le problème de Navier–Stokes instationnaire totalement discrétisé par éléments finis. Dans cette Note, nous étudions un schéma à deux grilles pour le problème de Navier–Stokes instationnaire totalement discrétisé par une méthode d'éléments finis en espace. Dans la première étape, le problème non-linéaire est discrétisé en espace et en temps sur une grille grossière de pas d'espace H avec un pas de temps k . Puis dans la deuxième étape le problème est discrétisé en espace sur une grille fine de pas d'espace h et le même pas de temps autour de la vitesse u_H calculée à l'étape précédente. L'idée de la méthode à deux grilles est que, sous des hypothèses adéquates, la contribution de u_H à l'erreur dans le terme non-linéaire en espace, est mesurée en norme L^2 en espace et en temps et a un ordre plus élevé que si elle était mesurée en norme H^1 . Nous présentons les résultats suivants : si $h = H^2 = k$, alors l'erreur globale de l'algorithme à deux grilles est de l'ordre de h , résultat identique à celui de la résolution directe du problème non-linéaire sur une grille fine. **Pour citer cet article :** *H. Abboud et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Le but de cette Note est de résoudre par une méthode à deux grilles, une grossière et une fine, les équations de Navier–Stokes instationnaires incompressibles et de montrer que l’erreur globale de l’algorithme à deux grilles est identique à celle de la résolution directe du problème non-linéaire sur une grille fine. La méthode à deux grilles réduit la complexité du calcul de la vitesse et de la pression, car le problème non-linéaire est seulement résolu sur une grille grossière et la pression et vitesse ainsi obtenues sont utilisées ensuite sur la grille fine. Nous introduisons le problème de Navier–Stokes pour ce genre de fluide (5), (6) que nous posons dans un domaine polygonal borné Ω de \mathbb{R}^2 à frontière $\partial\Omega$, pour un intervalle de temps $]0, T[$ donné.

En se basant sur la discrétisation que nous définissons dans le paragraphe 1, nous proposons le schéma à deux grilles suivant pour discrétiser (7)–(9) :

- *Première étape* (problème non-linéaire sur grille grossière) : Connaissant u_H^n , trouver (u_H^{n+1}, p_H^{n+1}) à valeurs dans $X_H \times M_H$ solution de

$$\forall v_H \in X_H, \quad \frac{1}{k}(u_H^{n+1} - u_H^n, v_H) + \nu(\nabla u_H^{n+1}, \nabla v_H) + (u_H^{n+1} \cdot \nabla u_H^{n+1}, v_H) + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u_H^{n+1}, u_H^{n+1} \cdot v_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} v_H) = \langle f^{n+1}, v_H \rangle, \quad (1)$$

$$\forall q_H \in M_H, \quad (q_H, \operatorname{div} u_H^{n+1}) = 0. \quad (2)$$

- *Deuxième étape* (problème linéarisé sur grille fine) : Connaissant (u_H^{n+1}, p_H^{n+1}) , trouver (u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) à valeurs dans $X_h \times M_h$ solution de

$$\forall v_h \in X_h, \quad \frac{1}{k}(u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) + (u_H^{n+1} \cdot \nabla u_h^{n+1}, v_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \langle f^{n+1}, v_h \rangle, \quad (3)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad (q_h, \operatorname{div} u_h^{n+1}) = 0. \quad (4)$$

Au pas de temps 1, on démarre la première étape avec $u_H = 0$, et la deuxième avec $u_h = 0$. De plus, au pas de temps $n + 1$, on prend pour u_H^n dans (1) une restriction de u_h^n sur la grille grossière, et pour calculer p_h^{n+1} , on démarre l’algorithme de découplage par une extension de p_H^{n+1} à la grille fine. Enfin f^{n+1} dans (1) et (3) est une approximation adéquate de f au temps t^{n+1} . On espère ainsi réduire le temps de calcul à la fois de la vitesse et de la pression.

Remarque 1. Notons que le terme de convection dans (1) est stabilisé pour qu’il soit anti-symétrique afin de simplifier l’analyse de l’erreur. En pratique, il n’est souvent pas stabilisé ; c’est le cas des essais numériques présentés à la fin. Nous faisons référence à [3] pour l’analyse numérique du schéma semi-discret non stabilisé. On peut aussi linéariser la première étape en prenant le terme non-linéaire au temps n (au lieu de $n + 1$). Ceci demande une condition CFL, mais comme $k \ll H$, cette condition est généralement vérifiée.

Dans ce qui suit, nous introduisons en premier le problème de Navier–Stokes évolutif continu, la formulation variationnelle ainsi que les espaces des éléments-finis que nous utilisons pour notre discrétisation. Dans la Section 2 nous présentons une première estimation de la solution de la première étape puis nous établissons un argument de dualité basé sur un problème de Stokes évolutif (13)–(14) et nous présentons aussi notre résultat principal qui est une estimation d’erreur d’ordre deux dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$. Celui-ci est appliqué à la différence $v_\eta^n - u(t^n)$ où v_η^n est la solution du schéma auxiliaire (15)–(17) avec pour second membre $g = f - u \cdot \nabla u$. Puis c’est complété par une estimation qui montre que v_η est très proche de u_η . Enfin, nous utilisons ces deux résultats avec $\eta = H$ pour établir l’erreur de la deuxième étape. Pour terminer, nous présentons quelques expériences simples dans le but de confirmer numériquement les résultats précédents.

1. Introduction

Let Ω be a bounded domain of \mathbb{R}^2 with a polyhedral boundary $\partial\Omega$ and let $]0, T[$ be a given time-interval. Consider the following Navier–Stokes equations for an incompressible fluid, with u the velocity and p the pressure:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nu \Delta u(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla u(x, t) + \nabla p(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} u(x, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad u(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times]0, T[, \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{6}$$

Setting $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$ and assuming that f belongs to $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$, it is well-known that (5)–(6) has the following variational formulation in $]0, T[$: Find $u(t) \in H_0^1(\Omega)^2$ and $p(t) \in L_0^2(\Omega)$ such that a.e. in $]0, T[$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (u'(t), v) + \nu(\nabla u(t), \nabla v) + (u(t) \cdot \nabla u(t), v) - (p(t), \operatorname{div} v) = (f(t), v), \tag{7}$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (q, \operatorname{div} u(t)) = 0, \tag{8}$$

and

$$u(0) = 0, \tag{9}$$

where $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ and $u(t) = u(\cdot, t)$. Furthermore, this problem has one and only one solution $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ and $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L_0^2(\Omega))$ (see e.g. Lions in [6] and Ladyzenskaya in [5]).

For discretizing (7)–(9), let $\eta > 0$ be a discretization parameter in space and for each η , let τ_η be a corresponding regular (or non-degenerate) family of triangulations of $\overline{\Omega}$, consisting of triangles such that any two triangles are either disjoint or share a vertex or an entire side. For an arbitrary triangle κ , we denote by η_κ the diameter of κ and by ρ_κ the diameter of the circle inscribed in κ . Then η denotes the maximum of η_κ and we assume that τ_η is regular in the sense of Ciarlet [2]: there exists a constant σ independent of η such that

$$\sup_{\kappa \in \tau_\eta} \frac{\eta_\kappa}{\rho_\kappa} = \sigma_\kappa \leq \sigma. \tag{10}$$

Let X_η and M_η be a ‘stable’ pair of finite-element spaces for discretizing the velocity u and pressure p , stable in the sense that it satisfies a uniform discrete inf-sup condition. As the two-grid scheme is better adapted to finite-elements of low degree, we may choose for instance the ‘mini-element’ (see Arnold, Brezzi and Fortin in [1]), where in each triangle κ , the pressure p is a polynomial of \mathbb{P}_1 and each component of the velocity is the sum of a polynomial of \mathbb{P}_1 and a ‘bubble’ function b_κ . Therefore, the finite-element spaces are:

$$X_\eta = \{v_\eta \in H_0^1(\Omega)^2; \forall \kappa \in \tau_\eta, v_\eta|_\kappa \in (\mathbb{P}_1 \oplus \operatorname{Vect}(b_\kappa))^2\} \quad \text{and}$$

$$M_\eta = \{q_\eta \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \forall \kappa \in \tau_\eta, q_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_1\}.$$

We use two regular triangulations of $\overline{\Omega}$: a coarse triangulation τ_H and a fine triangulation τ_h , that for practical purposes is a refinement of τ_H . On each of these, we define the same stable pair of finite-element spaces, (X_H, M_H) and (X_h, M_h) . We divide the time interval $[0, T]$ into N subintervals of equal length $k = \frac{T}{N}$, with grid-points $t^n = nk$, $0 \leq n \leq N$, and at each time step, we solve (1), (2) and (3), (4).

2. Error estimate for the solution of step one

The results in this section are written for the non-linear scheme (1), (2). To simplify, we denote by η the mesh parameter. The first result, stated in Lemma 2.1, is a standard error estimate.

Lemma 2.1. *Let X_η and M_η be defined as previously and choose*

$$f^{n+1}(x) = \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, t) \, dt, \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{11}$$

At each time step, (1)–(2) has a solution u_η^{n+1} and this solution is unique if k is sufficiently small.

If f and u are sufficiently smooth, each solution satisfies:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|u_\eta^n - u(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u_\eta^{n+1} - u(t^{n+1}) - (u_\eta^n - u(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{v} \left(\sum_{n=0}^{N-1} k |u_\eta^{n+1} - u(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(f, u, p, v, T)(\eta + k), \end{aligned} \tag{12}$$

with a constant $C(f, u, p, v, T)$ independent of η and k .

Its proof is essentially due to Temam [7].

The error estimate of order two in $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ is based on a duality argument for the transient Stokes problem:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \nu \Delta v(x, t) + \nabla q(x, t) = g(x, t) \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \tag{13}$$

$$\operatorname{div} v(x, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad v(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times]0, T[, \quad v(x, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{14}$$

This problem has a unique solution (v, q) . We assume that $g \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$; then $v' \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$.

The fully-discrete scheme for (13)–(14) is: find (v_η^n, q_η^n) with values in $X_\eta \times M_\eta$, for each $0 \leq n \leq N$, solution of:

$$\forall z_\eta \in X_\eta, \quad \frac{1}{k}(v_\eta^{n+1} - v_\eta^n, z_\eta) + \nu(\nabla v_\eta^{n+1}, \nabla z_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} z_\eta) = (g^{n+1}, z_\eta), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \tag{15}$$

$$\forall q_\eta \in M_\eta, \quad (q_\eta, \operatorname{div} u_\eta^{n+1}) = 0, \quad 0 \leq n \leq N - 1, \tag{16}$$

$$v_\eta^0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{17}$$

where g^{n+1} is the same approximation as in (11). The parabolic duality argument consists in defining the solution (w^n, λ^n) of the backward semi-discrete Stokes system:

$$\frac{1}{k}(w^{n+1} - w^n) + \nu \Delta w^n - \nabla \lambda^n = v_\eta^n - v(t^n) \quad \text{in } \Omega, \tag{18}$$

$$\operatorname{div} w^n = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w^n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad w^{N+1} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{19}$$

where $0 \leq n \leq N$. For each n , knowing w^{n+1} , the Stokes problem (18)–(19) has a unique solution $w^n \in H_0^1(\Omega)^2$, $\lambda^n \in L_0^2(\Omega)$.

Multiplying (18) first by w^n , next by $w^{n+1} - w^n$ and using standard arguments, we obtain the uniform bounds:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|w^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^N \|w^{n+1} - w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{v} \left(\sum_{n=0}^N k |w^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{S_2}{\sqrt{v}} \left(\sum_{n=0}^N k \|v_\eta^n - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{20}$$

where S_2 is the constant of Poincaré’s inequality, and

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \sqrt{v} |w^n|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{v} \left(\sum_{n=0}^N k |w^{n+1} - w^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^N k \left\| \frac{w^{n+1} - w^n}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\sum_{n=0}^N k \|v_\eta^n - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Now, we assume that Ω is convex. Since (18)–(19) is a steady Stokes problem with right-hand side $(w^{n+1} - w^n)/k + v(t^n) - v_\eta^n$, we have $w^n \in H^2(\Omega)^2$, $\lambda^n \in H^1(\Omega)$ and (21) implies also the uniform bound:

$$\left(\sum_{n=0}^N k (|w^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2) \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N k \|v_\eta^n - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \tag{22}$$

with a constant C independent of k and η . Then we have the following result:

Theorem 2.2. *If Ω is convex, $g \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$ and $k = O(\eta^2)$, then there exists a constant C , independent of η, k and g such that*

$$\left(\sum_{n=0}^N k \|v_\eta^n - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + k) \|g\|_{L^2(\Omega \times]0, T])}. \tag{23}$$

Proof. The proof is obtained by multiplying (18) by $k(v_\eta^n - v(t^n))$, summing over n and applying a discrete integration by parts, using the initial and final values of $v_\eta^n - v(t^n)$ and w^n . \square

Now, we split $u_\eta^n - u(t^n)$ into a linear contribution, $v_\eta^n - u(t^n)$, where v_η^n is the solution of the Stokes problem (15)–(17) with $g = f - u \cdot \nabla u$, and a non-linear one, $u_\eta^n - v_\eta^n$. On one hand, Theorem 2.2 gives:

$$\left(\sum_{n=0}^N k \|v_\eta^n - u(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(f, u, p, v, T)(\eta^2 + k),$$

with another constant $C(f, u, p, v, T)$. On the other hand, we prove the following ‘superconvergence’ result for the non-linear part. It relies on the fact that the error of the non-linear term $u(t^{n+1}) \cdot \nabla u(t^{n+1}) - u_\eta^{n+1} \cdot \nabla u_\eta^{n+1}$ is $O(\eta^2 + k)$.

Theorem 2.3. *Assume that $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$, $p' \in L^2(\Omega \times]0, T])$, $u \in L^\infty(0, T; W^{1,4}(\Omega)^2)$ and $u' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$, then there exists a constant C that does not depend on η and k , such that*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|v_\eta^n - u_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(v_\eta^{n+1} - u_\eta^{n+1}) - (v_\eta^n - u_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{v} \left(\sum_{n=0}^{N-1} k |v_\eta^{n+1} - u_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + k). \end{aligned} \tag{24}$$

Combining Theorems 2.2 and 2.3, we obtain:

Corollary 2.4. *Under the assumptions of Theorems 2.2 and 2.3, there exists a constant C , that does not depend on η and k , such that*

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} k \|u(t^n) - u_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + k). \tag{25}$$

3. Error estimate for the solution of step two

At each time step, (3), (4) is a square system of linear equations in finite dimension, and if k is small enough, it has a unique solution. This solution satisfies the following error estimate.

Theorem 3.1. *Under the assumptions of Theorems 2.2 and 2.3 and if k is small enough, the solution (u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) of the second step satisfies the following error estimate:*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|u_h^n - u(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(u_h^{n+1} - u(t^{n+1})) - (u_h^n - u(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{v} \left(\sum_{n=0}^{N-1} k |u_h^{n+1} - u(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(H^2 + h + k), \end{aligned} \tag{26}$$

where C is a constant that does not depend on h, H and k .

This analysis is confirmed by numerical results which are presented in the next section.

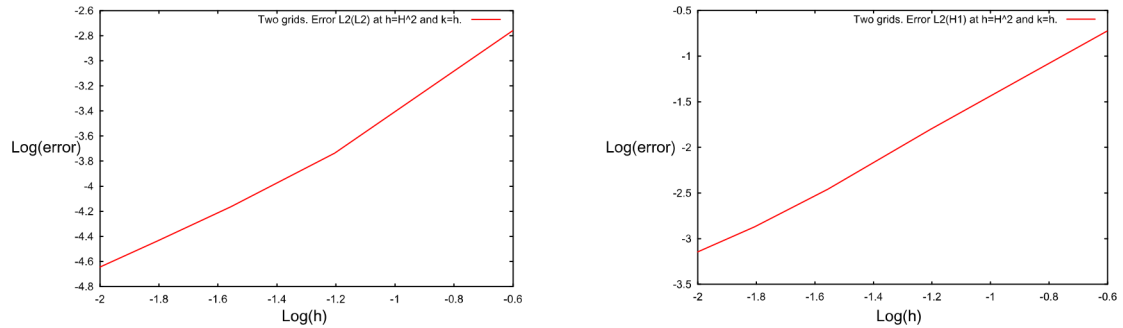


Fig. 1. Errors in the model.

4. Numerical results

We performed several experiments by using the FreeFem++ software, see [4], with the ‘mini’ element on the square domain $]0, 1[\times]0, 1[$. The exact velocity components are respectively:

$$u_1 = -2t e^{-t^2} x^2 (x-1)^2 y (y-1) (2y-1) \quad \text{and} \quad u_2 = 2t e^{-t^2} x (x-1) (2x-1) y^2 (y-1)^2,$$

the pressure is $p = t e^{-t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ and the viscosity $\nu = 10^{-2}$. The coarse and fine grids have respectively $N_g = 2, \dots, 10$ and $N_f = N_g^2$ points with $h = \frac{1}{N_f} = H^2$ and $k = h$. The results (Fig. 1) are as follows: the slope of the error on the velocity, $u - u_h$, in $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ is of order 1.1504 and in $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ is of order 0.9545; thus both are approximately of order one: $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega \times]0, T])} = O(h) = O(H^2)$ and $\|u - u_h\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)} = O(h)$.

Remark 1. Our theory also shows that, if the solution is smooth enough, the error on the pressure in $L^2(\Omega \times]0, T])$ is of the order of $h + k$. However, in the above example, we found a higher order of convergence.

References

- [1] D. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo* 21 (1984) 337–344.
- [2] Ph.G. Ciarlet, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, *Handbook of Numerical Analysis*, vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [3] V. Girault, J.L. Lions, Two-grid finite-element schemes for the transient Navier–Stokes equations, *M2AN* 35 (2001) 945–980.
- [4] F. Hecht, O. Pironneau, FreeFem++, see: <http://www.freefem.org>.
- [5] O.A. Ladyzenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon & Breach, New York, 1963 (in Russian, 1961; First English translation).
- [6] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [7] R. Temam, *Theory and Numerical Analysis of the Navier–Stokes Equations*, North-Holland, 1977.