Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 387–392

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Solutions faibles H^2 pour un modèle de fluide non newtonien

Cherif Amrouche [a], El-Hacene Ouazar [b]

[a] *Laboratoire de mathématiques appliquées, CNRS, UMR 51-42, université de Pau et des pays de l'Adour, 64000 Pau, France*
[b] *École normale supérieure de Kouba, département de mathématiques, Alger, Algérie*

Reçu le 23 mars 2005 ; accepté après révision le 19 juillet 2005

Disponible sur Internet le 6 septembre 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

L'objet de ce travail est d'étudier un système non linéaire modélisant un écoulement de fluide non newtonien, solution aqueuse de polymères. On s'intéresse ici à l'existence de solutions faibles pour le problème stationnaire dans un ouvert borné ou extérieur du plan. Une première difficulté tient au fait qu'on cherche celles-ci dans l'espace naturel fourni par les équations d'énergie, ce qui se complique encore lorsque le domaine est non borné. La seconde est due au fait que, dans les équations, le terme de viscosité est de dérivée d'ordre 2, alors que le terme non linéaire est d'ordre 3. ***Pour citer cet article : C. Amrouche, E.-H. Ouazar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Weak solutions H^2 for a non-Newtonian fluid model. This Note is devoted to the study a non-linear system modelling a flow of a non-Newtonian fluid, namely aqueous polymer solutions. In the present work, we prove a theorem on the existence of weak solutions for the steady-state problem in a bounded or exterior plane domain. A first difficulty is due to the fact that we search these solutions in the natural space given by the energy inequalities. The second difficulty stems from the fact that the non-linear term involves a third-order derivative, whereas its elliptic term is only a Laplace operator. ***To cite this article: C. Amrouche, E.-H. Ouazar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

It has been experimentally established that if we added to a viscous fluid, which moves around a body, a very small quantity of special polymer substances, without changing the density and the viscosity of the fluid, then the motion of the fluid in a boundary layer will be significantly affected and the frictions resistance of the moving body will decrease [6]. The comparison of the physical characteristics of water and weak aqueous solutions of polymers shows that for practically identical values of the density and viscosity, these fluids differ sharply in their relaxational properties. The equations modelling the motion of a steady-state (we are not interested here by the evolution problem) have the form (1) with the incompressibility condition (2) (the bold notations are reserved for vector functions). Instead

Adresses e-mail : Cherif.Amrouche@univ-pau.fr (C. Amrouche), ouazar@ens-Kouba.dz (E.-H. Ouazar).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.07.023

of classical boundary-conditions, here we consider in (3) the slip conditions for the velocity and Dirichlet condition for the vorticity. This model is very close to fluids of grade 2 in (4), for which existence results of $\mathbf{H}^3(\Omega)$ solutions are obtained, with Dirichlet boundary-conditions for the velocity, in dimension 2 (cf. [5]), when Ω is bounded and for external forces $\boldsymbol{f}$ belonging to $\mathbf{L}^2(\Omega)$ with the vorticity of $\boldsymbol{f}$ in $\mathbf{L}^2(\Omega)$. In the case of a three dimensional exterior domain, we recall the result obtained for the fluids of grade 2 by [4], when the external forces $\boldsymbol{f}$ are sufficiently small for the norm $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$. To our knowledge, the problem of existence of solutions in $\mathbf{H}^2(\Omega)$ for data $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ is still open. In this paper, we show an existence result of $\mathbf{H}^2(\Omega)$ solutions for the system (1)–(3), not depending on the size of the data.

1. Introduction

Il a été constaté expérimentalement que si l'on ajoute une petite quantité d'une substance de polymères dans un fluide visqueux en mouvement, sans changement de densité ni de viscosité, il apparaît un phénomène de couches limites [6]. Une comparaison des propriétés physiques de l'eau et d'une solution aqueuse de polymères montre que, pour des valeurs très voisines de densité et de viscosité, ces deux types de fluides possèdent des propriétés de relaxation très différentes. Les équations modélisant l'écoulement stationnaire (on ne s'intéresse pas ici au problème d'évolution) sont de la forme :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla(\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u}) + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

avec la condition d'incompressibilité :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

(les notations en gras désignent des quantités ou des espaces à valeurs vectorielles). Ici, au lieu de conditions aux limites classiques d'adhérence à la paroi, nous prenons les conditions de glissement pour le champ de vitesse et d'adhérence à la paroi du tourbillon :

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{3}$$

Ce modèle est très proche de celui des fluides de grade 2 :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{4}$$

pour lequel des résultats d'existence de solutions, avec des conditions aux limites de type Dirichlet sur la vitesse, ont été donnés en dimension 2 dans $\mathbf{H}^3(\Omega)$ (voir [5]), lorsque Ω est borné et pour des forces extérieures $\boldsymbol{f}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ avec le rotationnel de $\boldsymbol{f}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (voir aussi [2] et [3]). Dans le cas du domaine extérieur en dimension 3, on peut citer le résultat obtenu, toujours pour les fluides de grade 2, par [4] lorsque les forces extérieures $\boldsymbol{f}$ sont suffisamment petites pour la norme $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$. A notre connaissance, le problème d'existence de solutions dans $\mathbf{H}^2(\Omega)$ pour des données $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ reste ouvert.

L'objet principal de ce travail est de montrer que pour le système (1)–(3), il y a bien existence de solutions faibles $\mathbf{H}^2(\Omega)$, et ce indépendamment de la taille des données, ce qui sera fait dans la Section 2. La Section 3 est consacré au cas où Ω est un ouvert extérieur et l'usage des espaces de Sobolev avec poids va s'y avérer précieux.

Nous introduisons maintenant les espaces fonctionnels. On commence par définir l'espace

$$V = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ \Delta\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \operatorname{rot}\ \boldsymbol{v} = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

qui est un Hilbert pour le produit scalaire

$$((\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}))_V = (\nabla\boldsymbol{u}, \nabla\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} + (\Delta\boldsymbol{u}, \Delta\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)},$$

où la notation $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ désigne le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Pour l'étude du problème extérieur, on définit pour tout entier positif m et tout réel α l'espace :

$$\begin{aligned} W_\alpha^{m,2}(\Omega) = \big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\ &\forall\lambda \in \mathbb{N}^2\colon\ 0 \leqslant |\lambda| \leqslant k,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{-1}D^\lambda u \in L^2(\Omega);\\ &\forall\lambda \in \mathbb{N}^2\colon\ k+1 \leqslant |\lambda| \leqslant m,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|}\,D^\lambda u \in L^2(\Omega)\big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

où

$$\rho = (1 + r^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \lg r = \ln(2 + r^2)$$

et

$$k = k(m,\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{si } \alpha \notin \{0,\dots,m-1\}, \\ m-1-\alpha, & \text{si } \alpha \in \{0,\dots,m-1\}. \end{cases}$$

C'est un Banach réflexif pour la norme du graphe :

$$\|u\|_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} = \left(\sum_{0\leqslant|\lambda|\leqslant k} \left\|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{-1} D^\lambda u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k+1\leqslant|\lambda|\leqslant m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

On définit aussi la semi-norme :

$$|\, u \,|_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^\alpha D^\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Les poids dans la définition (5) sont choisis de telle sorte que les espaces correspondants satisfont deux propriétés. D'une part, les fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sont denses dans $W^{m,2}_\alpha(\Omega)$. D'autre part, soit $q' = \inf(q, m-1)$, où q est le plus haut degré des polynômes contenus dans $W^{m,2}_\alpha(\Omega)$. Alors la semi-norme $|\cdot|_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)}$ definit sur $W^{m,2}_\alpha(\Omega)/\mathcal{P}_{q'}$ une norme qui est équivalente à la norme quotient.

On pose :

$$\mathring{W}^{m,2}_\alpha(\Omega) = \left\{ v \in W^{m,2}_\alpha(\Omega);\ \gamma_0 v = 0,\ \gamma_1 v = 0, \dots, \gamma_{m-1} v = 0 \right\}. \tag{6}$$

On peut montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathring{W}^{m,2}_\alpha(\Omega)$ et donc son espace dual, $W^{-m,2}_{-\alpha}(\Omega)$, est un sous-espace de distributions. De plus, la semi-norme $|\cdot|_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)}$ est une norme sur $\mathring{W}^{m,2}_\alpha(\Omega)$ qui est équivalente à la norme complète $\|\cdot\|_{W^{m,}_\alpha(\Omega)}$.

2. Existence de solution dans un ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^{2,1}$. Nous notons par $\Gamma_0, \dots, \Gamma_p$ les composantes connexes de Γ, Γ_0 étant le bord de la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$. On supposera également que Ω simplement connexe ou Ω convexe. Pour $\boldsymbol{f}$ donnée, on cherche $(\boldsymbol{u}, \pi)$ solution du problème noté $\mathcal{P}$:

$$\begin{array}{ll} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla(\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u}) + \nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \ \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \tag{$\mathcal{P}$}$$

Théorème 2.1. *Pour tout $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in V \times L^2(\Omega)$, satisfaisant l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_V \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega).}$$

De plus, $\boldsymbol{u}$ vérifie l'inégalité d'énergie :

$$\nu \int_\Omega \left(|\nabla\boldsymbol{u}|^2 + |\Delta\boldsymbol{u}|^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Démonstration. Notons d'abord la caractérisation suivante :

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

où l'identité est algèbrique et topologique (on utilise ici la régularité $\mathcal{C}^{2,1}$ de Ω). □

2.1. Existence de solutions approchées

Pour chaque entier $m \geqslant 1$ on définit une solution approchée du problème $(\mathcal{P})$ par :

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_m = \displaystyle\sum_{j=1}^m g_{jm}\boldsymbol{w}_j, \quad g_{jm} \in \mathbb{R}, \\ \nu(\nabla\boldsymbol{u}_m, \nabla\boldsymbol{w}_j) - b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{u}_m - \alpha\Delta\boldsymbol{u}_m) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \tag{$\mathcal{P}_m$}$$

où les fonctions $\{\boldsymbol{w}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de V et satisfont :

$$\begin{array}{ll} -\Delta\boldsymbol{w}_j = \mu_j\boldsymbol{w}_j \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{w}_j = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{w}_j\cdot\boldsymbol{n} = \operatorname{rot}\boldsymbol{w}_j = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{array}$$

et $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, avec $\mu_j > 0$ est une suite de réels avec $\mu_j \to +\infty$. L'existence de $\boldsymbol{u}_m$ se déduit d'un corollaire du théorème du point fixe de Brouwer, où la relation spécifique à la dimension 2 :

$$\forall\boldsymbol{u}\in V, \quad b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{7}$$

joue un rôle fondamental, où b est définie par (avec la convention de sommation implicite sur les indices répétés) :

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \int_\Omega u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}w_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

2.2. Estimations et passage à la limite

Grâce à (7), on a :

$$\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_m)_{L^2(\Omega)}. \tag{8}$$

De l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ à trace normale nulle au bord : on obtient l'estimation :

$$\|\boldsymbol{u}_m\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous allons maintenant chercher une seconde estimation. Pour cela multiplions $(\mathcal{P}_m)$ par $g_{jm}\frac{\mu_j}{\lambda_j}$, et sommons sur j de 1 à m. Alors,

$$\nu(\Delta\boldsymbol{u}_m,\Delta\boldsymbol{u}_m)_{L^2(\Omega)} + b(\boldsymbol{u}_m,\Delta\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{u}_m-\alpha\Delta\boldsymbol{u}_m) = -(\boldsymbol{f},\Delta\boldsymbol{u}_m).$$

Le second terme du premier membre étant nul, on a donc

$$\nu(\Delta\boldsymbol{u}_m,\Delta\boldsymbol{u}_m)_{L^2(\Omega)} = -(\boldsymbol{f},\Delta\boldsymbol{u}_m). \tag{9}$$

On déduit de (8) et (9) que

$$\nu\|\Delta\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{u}_m\|_V \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, notée encore $\boldsymbol{u}_m$, on a :

$$\boldsymbol{u}_m \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{dans } V \text{ faible} \tag{10}$$

et on peut vérifier facilement que $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$ sur Γ. L'injection compacte de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et les estimations précédantes permettent de faire le passage à la limite et d'obtenir

$$\forall\boldsymbol{v}\in V, \quad \nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}-\alpha\Delta\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}).$$

L'existence de $\pi\in L^2(\Omega)$ se déduit enfin du théorème de De Rham, ce qui termine la démonstration.

3. Existence de solution dans un ouvert extérieur

Nous allons maintenant résoudre le problème $(\mathcal{P})$ dans le cas où Ω est un domaine extérieur de clase $\mathcal{C}^{2,1}$ de $\mathbb{R}^2$. Nous avons besoin d'introduire l'espace $Y(\Omega) = L^2(\Omega)\cap W_0^{-1,2}(\Omega)$, qui est un Banach pour la norme

$$\|f\|_{Y(\Omega)} = \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{W_0^{-1,2}(\Omega)}\right)^{1/2},$$

et dans lequel $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense (voir [1]). On commence par donner le

Lemme 3.1. *Soit $f\in L^2(\Omega)\cap W_0^{-1,2}(\Omega)$ tel que*

$$T_f(1) =: \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f\varphi_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \quad \textit{avec } \lim_{k\to\infty}\varphi_k = 1 \quad \textit{dans } W_0^{1,2}(\Omega). \tag{11}$$

Alors, il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *vérifiant* $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = f$ *dans* Ω *et tel que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W_0^{-1,2}(\Omega)}\big).$$

Démonstration. L'hypothèse (11) ayant lieu (noter que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W_0^{1,2}(\Omega)$), on montre l'existence d'une fonction $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W_0^{2,2}(\Omega)$, solution de

$$-\Delta\psi = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \tag{12}$$

unique à une constante additive près, vérifiant l'estimation

$$\|\psi\|_{W_0^{2,2}(\Omega)/\mathbb{R}} + \|\psi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant C\|f\|_{Y(\Omega)}.$$

Il est clair que $\nabla\psi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et son flux à travers Γ est nul. On peut construire alors une fonction $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ avec supp $\boldsymbol{v}_0$ compact et telle que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_0 = -\nabla\psi \quad \text{sur } \Gamma.$$

La fonction $\boldsymbol{w} = -\nabla\psi - \boldsymbol{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ répond à la question. □

Théorème 3.2. *Soit*

$$\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega), \quad \textit{vérifiant } T_{f_i}(1) = 0,\ i = 1, 2.$$

Alors, le problème $(\mathcal{P})$ *possède une solution* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{2,2}(\Omega)$ *vérifiant l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{2,2}(\Omega)} \leqslant C\big(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|_{W_0^{-1,2}(\Omega)}\big).$$

Démonstration. (i) On montre d'abord que si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ avec $u = 0$ sur Γ et tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors, $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ et vérifie l'estimation

$$\|u\|_{W_0^{2,2}(\Omega)} \leqslant C(\Omega)\big(\|u\|_{W_{-1}^{1,2}(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

On étend ensuite ce résultat aux champs de vecteurs $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_{-1}^{1,2}(\Omega)$ tel que $\Delta\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et satisfaisant $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ et $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$ sur Γ.

(ii) Pour chaque $i = 1, 2$, il existe grâce au lemme précédant $\boldsymbol{F}_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{div} \boldsymbol{F}_i = f_i$ dans Ω et satisfaisant

$$\|\boldsymbol{F}_i\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C(\Omega)\big(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|_{W_0^{-1,2}(\Omega)}\big).$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, soit $(\boldsymbol{F}_i^m)_m$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)^2$ telle que

$$\boldsymbol{F}_i^m \to \boldsymbol{F}_i \quad \text{dans } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Posons $f_i^m = \operatorname{div} \boldsymbol{F}_i^m$ et $K_i^m = \operatorname{supp} F_i^m$. Il existe donc une suite croissante de réels positifs $(R_m)_m$ telle que $\lim_{m\to\infty} R_m = +\infty$ et telle que $K_1^m \cup K_2^m \subset B_m$, où B_m est la boule de centre l'origine et de rayon R_m. Posons $\Omega_m = B_m \cap\ \Omega$. On sait, d'après le Théorème 2.2, qu'il existe $(\boldsymbol{u}_m, \pi_m) \in V(\Omega_m) \times L^2(\Omega_m)$ satisfaisant

$$\begin{array}{ll} -\nu\Delta\boldsymbol{u}_m + \boldsymbol{u}_m\cdot\nabla(\boldsymbol{u}_m - \alpha\Delta\boldsymbol{u}_m) + \nabla\pi_m = \boldsymbol{f}^m & \text{dans } \Omega_m, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}_m = 0 & \text{dans } \Omega_m, \\ \boldsymbol{u}_m\cdot\boldsymbol{n} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_m = 0 & \text{sur } \Gamma_m, \end{array}$$

où Γ_m est la frontière de Ω_m. On montre ensuite que :

$$\nu\big(\|\nabla\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(\Omega_m)} + \|\Delta\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(\Omega_m)}\big) \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{Y(\Omega)}. \tag{13}$$

Posons maintenant, pour m assez grand $\tilde{\boldsymbol{u}}_m = \boldsymbol{u}_m$ dans Ω_m et $\tilde{\boldsymbol{u}}_m = 0$ en dehors de B_m. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction telle que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leqslant \psi(\boldsymbol{x}) \leqslant 1, \quad \psi = 0 \quad \text{si } |\boldsymbol{x}| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \psi = 1 \quad \text{si } |\boldsymbol{x}| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Posons $\psi_m(\boldsymbol{x}) = \psi(\frac{\boldsymbol{x}}{m})$, pour m entier strictement positif, et $\boldsymbol{v}_m = \psi_m \tilde{\boldsymbol{u}}_m$. Alors

$$\|\nabla \boldsymbol{v}_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta \boldsymbol{v}_m\|_{L^2(\Omega)}) \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{Y(\Omega)},$$

c'est-à-dire que,

$$\boldsymbol{v}_m \text{ est bornée dans } \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{2,2}(\Omega). \tag{14}$$

On peut donc extraire une sous-suite, notée encore $\boldsymbol{v}_m$, telle que

$$\boldsymbol{v}_m \rightharpoonup \boldsymbol{w} \quad \text{dans } \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla \boldsymbol{v}_m \rightharpoonup \nabla \boldsymbol{w} \quad \text{dans } \mathbf{H}^1(\Omega),$$

avec

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{w} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Maintenant, notons que $\boldsymbol{v}_m$ vérifie :

$$\begin{aligned} &-\nu \Delta \boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_m \cdot \nabla(\boldsymbol{v}_m - \alpha \Delta \boldsymbol{v}_m) + \nabla \pi_m = \boldsymbol{f} && \text{dans } \Omega_{m/2}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{v}_m = 0 && \text{dans } \Omega_{m/2}. \end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^2$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que supp $\boldsymbol{\varphi} \subset \Omega_N$ et pour tout entier $m \geqslant 2N$, on a

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_m \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + b(\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}_m - \alpha \Delta \boldsymbol{v}_m) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

L'injection de $H^1(\Omega_N)$ dans $L^2(\Omega_N)$ étant compacte, on peut passer à la limite pour obtenir :

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{w} - \alpha \Delta \boldsymbol{w}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

A la différence du cas borné, on déduit enfin du théorème de De Rham l'existence de $\pi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ seulement, ce qui termine la démonstration. □

Références

[1] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroire, Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator, An approach in weighted Sobolev spaces, J. Math. Pures Appl. 76 (1997) 55–81.

[2] D. Cioranescu, E.H. Ouazar, Existence et unicité pour les fluides de second grade, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 298 (1984) 285–287.

[3] D. Cioranescu, E.H. Ouazar, Existence and uniqueness for fluids of second grade, in : Non Linear PDE Collège de France Seminar, vol. 109, Pitman, 1983, pp. 178–197.

[4] G.P. Galdi, A. Sequeira, J. Videman, Steady motions of a second-grade fluid in an exterior domain, Adv. Math. Sci. Appl. 7 (2) (1997) 977–995.

[5] V. Girault, L.R. Scott, Analysis of a two-dimensional grade-two fluid model with a tangential boundary condition, J. Math. Pures Appl. 78 (10) (1999) 981–1011.

[6] P.A. Oskolkov, The uniqueness and global solvability of boundary-value problems for the equations of motion for aqueous solutions of polymers, Inst. V.A. Steklova AN SSSR, Leningrad 387 (1973) 98–136.