

Probabilités/Statistique

# Propriétés de l'EDM pour un processus de Poisson d'intensité discontinue

Ali Souleyman Dabye

*Université Adam Barka d'Abéché, faculté des sciences et techniques, BP 1173, N'Djamena, Tchad*

Reçu le 15 avril 2005 ; accepté après révision le 20 juillet 2005

Disponible sur Internet le 9 février 2006

Présenté par Paul Deheuvels

## Résumé

Le problème considéré traite de l'estimation d'un paramètre  $2d$ -dimensionnel d'un processus de Poisson non homogène. La fonction d'intensité du processus est une fonction régulière par rapport aux  $d$  premières variables et discontinue par rapport aux  $d$  autres variables. Nous montrons la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur de la distance minimale. **Pour citer cet article :** *A.S. Dabye, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**MDE properties of a Poisson process with discontinuous intensity.** The problem considered is a problem parameter estimation of a  $2d$ -dimensional parameter of a Poisson process. The intensity function of the process is a smooth function with respect to first  $d$  variables and is discontinuous function of  $d$  other variables. We show the consistency and asymptotic normality of the minimum distance estimator. **To cite this article:** *A.S. Dabye, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Non homogeneous Poisson processes represent an important model in the class of point processes, from the point of view of their applications. A wide choice of intensity functions allows one to obtain a good adjustment of the mathematical modeling precision for real phenomena. There is much in the literature describing different point processes, and in particular, Poisson processes, with special attention given to parametric estimation problems. We can mention here Cox and Lewis [2], Karr [6], Daley and Vere-Jones [4], Snyder and Miller [9], Kutoyants [7], etc. The properties of estimators (Maximum likelihood (MLE), Bayesian (BE), Minimum Distance (MDE), Minimum Contrast, etc.) are the most often studied in the regular case. According to general theory, all these estimators are consistent, and asymptotically normal, and the two first are asymptotically efficient (see Ibragimov and Khasminskii [5] for the general case and Kutoyants [7] for the case of a non homogeneous Poisson process). In the non regular case, when, for example, the intensity function is discontinuous, the properties of estimators are completely different. In such a case, the Fisher information is equal at infinity and the BE and MLE are no longer asymptotically normal (see also Kutoyants [7]). The speed of convergence is essentially better than in the regular case. Note that the MDE is more robust (see Parr [8]).

Adresse e-mail : [dabye\\_ali@yahoo.fr](mailto:dabye_ali@yahoo.fr) (A.S. Dabye).

for a general bibliography on this type of estimator). Because of its definition even in the case of a discontinuous intensity function, the problem of the estimation of a parameter is similar to the regular case, i.e. that the speed of convergence is  $\sqrt{n}$  and the estimators are asymptotically normal [7]. In the case of a bidimensional parameter, this type of result has been established by Aubry and Dabye [1] and this Note looks at the multidimensional case. That is to say, we assume that the intensity function depends on the  $2d$ -dimensional parameter, where the problem is regular with respect to the first  $d$  components, and the intensity function is discontinuous with respect to  $d$  other components. We show that, even in the multidimensional case, the estimated components have the same effect as in the regular case, with speed of convergence  $\sqrt{n}$ , and that the MDE is consistent and asymptotically normal.

## 1. Introduction

Les processus de Poisson non homogènes représentent un modèle important dans la classe des processus ponctuels du point de vue des applications. Une diversité de choix des fonctions d'intensité permet d'obtenir un bon ajustement de précision du modèle mathématique pour des phénomènes réels. Il existe une vaste littérature décrivant les différents processus ponctuels, et en particulier les processus de Poisson avec une attention spéciale aux problèmes d'estimation paramétrique. Nous pouvons mentionner ici Cox et Lewis [2], Karr [6], Daley et Vere-Jones [4], Snyder et Miller [9], Kutoyants [7], etc. Les propriétés des estimateurs (du maximum de vraisemblance (MLE), de l'estimateur bayésien (BE), de l'estimateur de la distance minimale (MDE), de l'estimateur du minimum de contraste, etc.) sont le plus souvent étudiés dans le cas régulier. Selon la théorie générale, tous ces estimateurs sont consistants et asymptotiquement normaux et les deux premiers sont asymptotiquement efficaces (voir Ibragimov et Khasminskii [5] dans le cas général et Kutoyants [7] dans le cas du processus de Poisson non homogène). Dans le cas non régulier, quand par exemple la fonction d'intensité est discontinue les propriétés des estimateurs sont tout à fait différentes. Dans un tel cas, l'information de Fisher est égale à l'infini et que le BE et le MLE ne sont plus asymptotiquement normaux (voir également Kutoyants [7]). La vitesse de convergence est essentiellement meilleure que dans le cas régulier. Notons que le MDE est plus robuste (voir Parr [8] pour une bibliographie générale sur ce type d'estimateur). En raison de sa définition même dans le cas de la fonction d'intensité discontinue, le problème de l'estimation du paramètre est semblable au cas régulier, c'est-à-dire que la vitesse de convergence est  $\sqrt{n}$  et les estimateurs sont asymptotiquement normaux [7]. Dans le cas du paramètre bidimensionnel, ce type de résultats, a été établi par Aubry et Dabye [1] et cette Note traite du cas multidimensionnel. C'est-à-dire, nous supposons que la fonction d'intensité dépend du paramètre  $2d$ -dimensionnel, où le problème est régulier par rapport aux  $d$  premières composantes, et la fonction d'intensité est discontinue par rapport aux  $d$  autres composantes. Nous montrons que, même dans le cas multidimensionnel, les composantes estimées ont les mêmes effets que dans le cas régulier, avec la vitesse de convergence  $\sqrt{n}$ , et que le MDE est consistant et asymptotiquement normal.

## 2. Préliminaires

On observe  $n$  processus de Poisson indépendants  $X_j = (X_j(t), t \in [0, T])$  pour  $j = 1, \dots, n$ , de même intensité :

$$\Lambda(\theta_0, t) = \int_0^t S(\theta_0, s) ds \quad \text{avec} \quad S(\theta_0, t) = \sum_{i=1}^d \gamma_i^0 g(\omega_i^0 t) + \lambda, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La vraie valeur du paramètre  $\theta_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_d, \omega_1, \dots, \omega_d)$  est inconnue, mais appartient à l'ensemble  $\Theta = \bigotimes_{i=1}^d (\Theta_i \times \Gamma_i) \subset \mathbb{R}^{2d}$  où  $\Theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$  et  $\Gamma_i = (\frac{\tau_i^*}{\alpha_i}, \frac{\tau_i^*}{\beta_i})$   $\Gamma_i$ , partition de  $[0, T]$ .

On introduit ci-dessous l'estimateur de la distance minimale de  $\theta_0$  et on s'intéresse à ses propriétés asymptotiques.

Désignons par  $L^2([0, T], dt)$  l'espace de Hilbert muni de la norme  $\|f(\cdot)\| = (\int_0^T f^2(t) dt)^{1/2}$ . Nous définissons l'estimateur de la distance minimale (MDE)  $\theta_n^*$  comme solution de l'équation :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j(\cdot) - \Lambda(\theta_n^*, \cdot) \right\| = \inf_{\vartheta \in \Theta} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j(\cdot) - \Lambda(\vartheta, \cdot) \right\|.$$

Notons que la fonction  $S(\theta_0, t)$  est continue en tout point  $\gamma_i$  et discontinue en tout point  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Notons les variables aléatoires  $u_{i,n}^* = \sqrt{n}(\gamma_{i,n}^* - \gamma_i)$  et  $v_{i,n}^* = \sqrt{n}(\omega_{i,n}^* - \omega_i)$ , et les vecteurs  $\theta_n^*$ ,  $\vartheta$  par  $\theta_n^* =$

$(\gamma_{1,n}^*, \dots, \gamma_{d,n}^*, \omega_{1,n}^*, \dots, \omega_{d,n}^*)$  et  $\vartheta = (\gamma_1, \dots, \gamma_d, \omega_1, \dots, \omega_d)$ . Le terme  $o_P(1)$  désigne la convergence vers 0 en probabilité. La dérivée de toute fonction  $f(\vartheta, t)$  ( $\vartheta \in \Theta, t \in [0, T]$ ) par rapport à  $\vartheta$  sera notée  $\dot{f}(\vartheta, t)$ .

Nous définissons les fonctions  $G_i(t, \theta)$  et  $F_i(t, \theta)$  pour tout  $t \in [0, T]$  comme suit :

$$G_i(t, \theta) = \int_0^t g_i(\omega_i s) ds \quad \text{et} \quad F_i(t, \theta) = \frac{\gamma_i}{\omega_i} \left( \int_0^t g_i(\omega_i s) ds - t g_i(\omega_i t) \right).$$

Soient  $A, B$  et  $C$  les matrices carrées d'ordre  $d$  définies par les termes :

$$A_{l,i}(\theta) = \int_0^T G_l(t, \theta) G_i(t, \theta) dt, \quad B_{l,i}(\theta) = \int_0^T F_l(t, \theta) G_i(t, \theta) dt, \quad \text{et} \quad C_{l,i}(\theta) = \int_0^T F_l(t, \theta) F_i(t, \theta) dt; \quad (1)$$

les matrices  $A^n, B^n$  et  $C^n$  sont définies respectivement par  $A_{l,i}^n = A_{l,i}^n(\theta_n^*), B_{l,i}^n = B_{l,i}^n(\theta_n^*), C_{l,i}^n = C_{l,i}^n(\theta_n^*)$ , et  $\mathcal{R}^{(j,k)} = (\mathcal{R}_{l,i}^{(j,k)})_{1 \leq l, i \leq d}$ ,  $j, k = 1, 2$ , les blocs des matrices représentées respectivement par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{l,i}^{(1,1)} &= \int_0^T \int_0^T G_l(t, \theta_0) G_i(t, \theta_0) \Lambda(\theta_0, t \wedge s) dt ds, & \mathcal{R}_{l,i}^{(1,2)} &= \int_0^T \int_0^T G_l(t, \theta_0) F_i(t, \theta_0) \Lambda(\theta_0, t \wedge s) dt ds, \\ \mathcal{R}_{l,i}^{(2,2)} &= \int_0^T \int_0^T F_l(t, \theta_0) F_i(t, \theta_0) \Lambda(\theta_0, t \wedge s) dt ds. \end{aligned}$$

On introduit ensuite  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{R}$ , matrices carrées d'ordre  $2d$  définies par :

$$\mathcal{D}(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ B(\theta) & C(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\theta_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{(1,1)} & \mathcal{R}^{(1,2)} \\ \mathcal{R}^{(1,2)} & \mathcal{R}^{(2,2)} \end{pmatrix}.$$

Introduisons le processus  $W_n(\cdot)$  défini par :  $W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j(t) - \Lambda(\theta_0, t))$ .

Pour établir les propriétés asymptotiques, nous utilisons les conditions suivantes :

**Condition C<sub>0</sub>.**

- (a) Les fonctions  $g_i(\cdot)$  et la constante  $\lambda$  sont positives et connues ;
- (b) les fonctions  $g_i(\cdot)$  sont continûment différentiables sur  $[0, \tau_i^*) \cup (\tau_i^*, T]$  et admettent des sauts aux points  $\tau_i^* \in (0, T)$  avec  $g_i(\tau_i^*+) - g_i(\tau_i^*-) = r_i > 0$  et  $g_i(\tau_i^*+) g_i(\tau_i^*-) > 0$  ;
- (c)  $\Theta = \otimes_{i=1}^d (\Theta_i \times \Gamma_i)$  est tel que l'on a :  $\frac{\tau_1^*}{\beta_1} < \frac{\tau_1^*}{\alpha_1} < \frac{\tau_2^*}{\beta_2} < \frac{\tau_2^*}{\alpha_2} < \dots < \frac{\tau_d^*}{\beta_d} < \frac{\tau_d^*}{\alpha_d}$ .

**Condition C<sub>1</sub>.** La matrice  $\mathcal{D}(\theta)$  est non dégénérée, uniformément pour tout  $\theta \in \Theta$ , c'est-à-dire

$$\inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|e|=1} e^T \mathcal{D} e > 0,$$

où  $e \in \mathbb{R}^{2d}$ .

**3. Résultats principaux**

Notre objectif est d'étudier les propriétés asymptotiques du MDE quand  $n$  tend vers l'infini. Plus précisément, sous certaines hypothèses nous établissons la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur de la distance minimale  $\theta_n^*$ .

**Théorème 3.1.** Si la condition  $C_0$  est satisfaite, alors l'estimateur de la distance minimale  $\theta_n^*$  est consistant, c'est-à-dire pour tout  $\delta > 0$  on a :

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)} \{ |\theta_n^* - \theta_0| > \delta \} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \tag{2}$$

Pour démontrer ce théorème, vérifions d'abord la condition d'identifiabilité assurée par le lemme ci-dessous.

**Lemme 3.2.** *Si la condition  $C_0$  est satisfaite, alors pour tout  $\nu > 0$ , on a :*

$$\psi(\nu) = \inf_{|\vartheta - \theta_0| > \nu} \|\Lambda(\vartheta, \cdot) - \Lambda(\theta_0, \cdot)\| > 0.$$

**Démonstration.** Pour la preuve de ce lemme voir [3, Lemme 4.2].  $\square$

**Démonstration du Théorème 3.1.** Nous établissons tout d'abord la majoration :

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)} \{ |\theta_n^* - \theta_0| > \nu \} \leq \mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)} \left\{ 2 \int_0^T \mathbb{E} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (X_n(t) - \Lambda(\theta_0, t)) \right)^2 dt > \sqrt{n} \psi(\nu) \right\}.$$

Par la suite, en appliquant l'inégalité de Chebychev, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)} \{ |\theta_n^* - \theta_0| > \nu \} \leq \frac{4 \int_0^T \Lambda(\theta_0, t) dt}{n \psi(\nu)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (3)$$

car  $\psi(\nu)$ , après le Lemme 3.2,  $> 0$ . De plus, on peut montrer que  $\psi(\nu) > \kappa \nu$  où  $\kappa > 0$  (voir Lemme 4.2 [3]). Ainsi le théorème est démontré (voir les détails dans [3]). Énonçons ci-dessous le théorème de normalité asymptotique.  $\square$

**Théorème 3.3.** *Si les conditions  $C_0$  et  $C_1$  sont satisfaites, alors l'estimateur de la distance minimale  $\theta_n^*$  est asymptotiquement normal, c'est-à-dire :*

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathcal{D}^{-1}(\theta_0) \mathcal{R}(\theta_0) \mathcal{D}^{-1}(\theta_0)).$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques lemmes.

**Lemme 3.4.** *Si les conditions  $C_0$  et  $C_1$  sont satisfaites, alors nous avons :*

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)} \left\{ |\theta_n^* - \theta_0| \leq \frac{1}{n^\delta} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{pour } 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

**Démonstration.** Dans (3), en posant  $\nu = n^{-\delta}$  nous obtenons le résultat.  $\square$

**Démonstration du Théorème 3.3.** Introduisons la fonction  $H_n(\vartheta) = \int_0^T \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta, t) \right]^2 dt$  et rappelons que l'estimateur de la distance minimale  $\theta_n^*$  est une solution de l'équation :  $\theta_n^* = \arg \inf_{\vartheta \in \Theta} H_n(\vartheta)$ . La fonction  $H_n(\vartheta)$  est dérivable par rapport aux composantes  $\gamma_1, \dots, \gamma_d, \omega_1, \dots, \omega_d$  de  $\vartheta$ . Cet estimateur est une solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \gamma_1} H_n(\theta_n^*) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_d} H_n(\theta_n^*) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \omega_1} H_n(\theta_n^*) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \omega_d} H_n(\theta_n^*) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ce système peut présenter plusieurs solutions, mais l'EDM est une de ces solutions.

Après calculs, le système d'Éq. (4) nous donnent la représentation suivante :

$$\begin{cases} \int_0^T \left( W_n(t) - \sum_{l=1}^d u_{l,n} G_{l,n}(t) - \sum_{l=1}^d v_{l,n} F_{l,n}(t) \right) F_{l,n}(t) dt = 0, & l = 1, \dots, d, \\ \int_0^T \left( W_n(t) - \sum_{l=1}^d u_{l,n} G_{l,n}(t) - \sum_{l=1}^d v_{l,n} F_{l,n}(t) \right) F_{l,n}(t) dt = 0, & l = 1, \dots, d. \end{cases} \quad (5)$$

En adoptant les notations du (1), la représentation (5) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 A^{(n)}\mathbf{u}_n + B^{(n)}\mathbf{v}_n &= Y_n^{(1)}, & B^{(n)}\mathbf{u}_n + C^{(n)}\mathbf{v}_n &= Y_n^{(2)}, & \mathbf{u}_n &= (u_{1,n}, \dots, u_{d,n}), & \mathbf{v}_n &= (v_{1,n}, \dots, v_{d,n}), \\
 Y_n^{(1)} &= \begin{pmatrix} Y_{1,n}^{(1)} \\ \vdots \\ Y_{d,n}^{(1)} \end{pmatrix}, & Y_n^{(2)} &= \begin{pmatrix} Y_{1,n}^{(2)} \\ \vdots \\ Y_{d,n}^{(2)} \end{pmatrix}, \\
 Y_{l,n}^{(1)} &= \int_0^T W_n(t)G_{l,n}(t) dt, & Y_{l,n}^{(2)} &= \int_0^T W_n(t)F_{l,n}(t) dt, & l &= 1, \dots, d, \\
 Y_i^{(1)} &= \int_0^T W_n(t)G_l(t) dt, & Y_l^{(2)} &= \int_0^T W_n(t)F_l(t) dt, & l &= 1, \dots, d.
 \end{aligned}$$

Ainsi la représentation (5) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^{(n)} & B^{(n)} \\ B^{(n)} & C^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \equiv \mathcal{D}_n \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

La matrice carrée  $\mathcal{D}_n$  d'ordre  $2d$  est non dégénérée d'après la condition  $C_1$ . Donc  $\mathcal{D}_n^{-1}$  existe.

D'autre part, nous avons (voir la preuve [3, Théorème 4.1])

$$\begin{aligned}
 \int_0^T W_n(t)G_{l,n}(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \int_0^T L_l(s)\Pi_j(ds) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \psi_{l,j}, \\
 \int_0^T W_n(t)F_{l,n}(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \int_0^T M_l(s)\Pi_j(ds) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \psi_{l+d,j},
 \end{aligned}$$

$$\Pi_j(ds) = dX_j(s) - S(\theta_0, s) ds, \quad L_l(s) = \int_s^T G_{l,n}(t) dt \quad \text{et} \quad M_l(s) = \int_s^T F_{l,n}(t) dt.$$

Lorsqu'on pose  $\psi_l = (\psi_{l,1}, \dots, \psi_{l,n})$ , pour tout  $l = 1, \dots, 2d$ , alors, comme les vecteurs  $\psi_1, \dots, \psi_{2d}$  sont des vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués et centrés, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\psi_l = 0, \quad \text{pour tout } l = 1, \dots, 2d \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\psi_l^2 = \begin{cases} \int_0^T L_l^2(s) S(\theta_0, s) ds & \text{pour } l = 1, \dots, d, \\ 0 & \\ \int_0^T M_l^2(s) S(\theta_0, s) ds & \text{pour } l = d + 1, \dots, 2d, \\ 0 & \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0} Y_l^{(1)} Y_m^{(1)} = \int_0^T \int_0^T G_l(t, \theta_0) G_m(t, \theta_0) \Lambda(\theta_0, t \wedge s) dt ds,$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0} Y_l^{(1)} Y_m^{(2)} = \int_0^T \int_0^T G_l(t, \theta_0) F_m(t, \theta_0) \Lambda(\theta_0, t \wedge s) dt ds,$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0} Y_l^{(2)} Y_m^{(2)} = \int_0^T \int_0^T F_l(t, \theta_0) F_m(t, \theta_0) \Lambda(\theta_0, t \wedge s) dt ds.$$

Considérons  $\lambda$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{2d}$ . On a le produit scalaire :

$$\langle \lambda, \psi_l \rangle = \sum_{l=1}^{2d} \lambda_l \psi_{l,n} = \sum_{l=1}^d \lambda_l \int_0^T W_n(t) G_{l,n}(t) dt + \sum_{l=d+1}^{2d} \lambda_l \int_0^T W_n(t) F_{l,n}(t) dt,$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0} \eta_n = \lambda \mathbb{E}_{\theta} ((\theta_n^* - \theta_0)(\theta_n^* - \theta_0)^T) \lambda^T = \sum_{i=1}^{2d} \sum_{l=1}^{2d} \lambda_i \mathbb{E}_{\theta_0} \psi_{j,n}^i \psi_{j,n}^l \lambda_l.$$

Du Théorème Central Limite, il résulte :

$$\langle \lambda, \psi_l \rangle \Rightarrow \mathcal{N}(0, \lambda \mathcal{R}(\theta_0) \lambda^T).$$

Pour conclure nous utilisons des lemmes ci-après où les preuves sont données en détail dans [3].

**Lemme 3.5.** *Sous les conditions  $C_0$  et  $C_1$  les relations suivantes sont satisfaites :*

$$\int_0^T G_{l,n}(t) G_{i,n}(t) dt = \int_0^T G_l(\theta_0, t) G_i(\theta_0, t) dt + o_P(1),$$

$$\int_0^T F_{l,n}(t) G_{i,n}(t) dt = \int_0^T F_l(\theta_0, t) G_i(\theta_0, t) dt + o_P(1),$$

$$\int_0^T F_{l,n}(t) F_{i,n}(t) dt = \int_0^T F_l(\theta_0, t) F_i(\theta_0, t) dt + o_P(1).$$

**Lemme 3.6.** *Sous les conditions  $C_0$  et  $C_1$  les relations suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{pmatrix} Y_{1,n}^{(i)} \\ \vdots \\ Y_{d,n}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1^{(i)} \\ \vdots \\ Y_d^{(i)} \end{pmatrix} + o_P(1), \quad i = 1, 2.$$

Finalement, l'application de ces lemmes, l'utilisation d'arguments similaires au cas bidimensionnel [1] et le Théorème Central Limite (voir [7, Théorème 1.1]), nous permettent de conclure :

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) = \mathcal{D}_n^{-1} \eta_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathcal{D}^{-1}(\theta_0) \mathcal{R}(\theta_0) \mathcal{D}^{-1}(\theta_0)).$$

## Remerciements

L'auteur souhaite exprimer sa gratitude envers le professeur Yury Kutoyants pour toutes ses remarques, suggestions et commentaires.

## Références

- [1] C. Aubry, A.S. Dabye, Asymptotic normality of the minimum distance estimators for a Poisson process with a discontinuous intensity function, *J. Statist. Plann. Inference* 99 (2001) 3–23.
- [2] D.R. Cox, P.A.W. Lewis, *The Statistical Analysis of Series of Events*, Methuen, London, 1966.
- [3] A.S. Dabye, Estimation par la méthode de la distance minimale d'un paramètre multidimensionnel pour un processus de Poisson d'intensité discontinue, Prépublication de l'Université du Maine, Le Mans, 04-2, 2004.
- [4] D.J. Daley, D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer, New York, 1988.
- [5] I.A. Ibragimov, R.Z. Khasminskii, *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*, Springer, New York, 1981.
- [6] A.F. Karr, *Point Processes and Their Statistical Inference*, second ed., Marcel Dekker, New York, 1991.
- [7] Yu.A. Kutoyants, *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*, Lecture Notes in Statist., vol. 134, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] W.C. Parr, Minimum distance estimation: a bibliography, *Commun. Statist. Theory Methods A* 10 (12) (1981) 1205–1224.
- [9] D.R. Snyder, M.I. Miller, *Random Point Processes in Time and Space*, Springer, New York, 1991.