

Probabilités

# Distance riemannienne, théorème de Rademacher et inégalité de transport sur le groupe des lacets

Shizan Fang<sup>a</sup>, Jinghai Shao<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institut de mathématiques de Bourgogne, B.P. 47870, 21078 Dijon, France

<sup>b</sup> School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, Chine

Reçu le 31 mars 2005 ; accepté après révision le 20 juillet 2005

Présenté par Paul Malliavin

## Résumé

Dans cette Note, nous allons considérer la distance riemannienne sur le groupe des lacets, qui sera identifiée à celle introduite par Hino et Ramirez [M. Hino, J.A. Ramirez, Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Ann. Probab. 31 (2003) 1254–1295]. Une inégalité de transport est établie. *Pour citer cet article* : S. Fang, J. Shao, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Riemannian distance, Rademacher theorem and transportation cost inequality on loop groups.** In this Note, we shall consider the Riemannian distance on loop groups, which will be identified to one introduced by Hino and Ramirez [M. Hino, J.A. Ramirez, Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Ann. Probab. 31 (2003) 1254–1295]. A transportation cost inequality is established. *To cite this article*: S. Fang, J. Shao, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Let  $G$  be a connected compact Lie group and  $\mathcal{G}$  its Lie algebra endowed with an  $\text{Ad}_G$ -invariant metric  $|\cdot|_{\mathcal{G}}$ . On the loop group  $\mathbf{L}_e(G) = \{\ell : [0, 1] \rightarrow G \text{ continuous}, \ell(0) = \ell(1) = e\}$ , Hino and Ramirez [15] introduced the distance  $d_I(\ell_1, \ell_2) = \inf\{\hat{L}(\gamma); \gamma(0) = \ell_1, \gamma(1) = \ell_2\}$  where

$$\hat{L}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i \in \Delta} d^{\mathcal{P}}(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})); \Delta \text{ subdivision of } [0, 1] \right\}.$$

On the other hand, let  $H_0(\mathcal{G}) = \{h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}; h(0) = h(1) = 0, |h|_{H_0}^2 = \int_0^1 |\dot{h}(\theta)|_{\mathcal{G}}^2 d\theta < +\infty\}$ . For  $z \in H(H_0(\mathcal{G})) := \{z(t) = \int_0^t z'(s) ds; \|z\|^2 = \int_0^1 |z'(t)|_{H_0}^2 dt < +\infty\}$ , consider

Adresses e-mail : [fang@u-bourgogne.fr](mailto:fang@u-bourgogne.fr) (S. Fang), [jinghai.shao@yahoo.com.cn](mailto:jinghai.shao@yahoo.com.cn) (J. Shao).

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, \theta) = \gamma(t, \theta) z'(t)(\theta), \quad \gamma(0, \theta) = e.$$

For such a curve  $\gamma$  on  $\mathbf{L}_e(G)$ , set  $L(\gamma) = \|z\|$  and define  $d_L(\ell_1, \ell_2) = \inf\{L(\gamma); \gamma(0) = \ell_1, \gamma(1) = \ell_2\}$ .

In this Note, we prove that these two distances  $d_I$  and  $d_L$  on  $L$  coincide, and

**Theorem 0.1.** *Let  $\nu$  be the heat measure at time 1 on  $\mathbf{L}_e(G)$  (see [17]). Defining the Wasserstein distance with respect to  $d_L$ , then*

$$W_2(\nu, f\nu)^2 \leq C \int_{\mathbf{L}_e(G)} f \log f \, d\nu, \quad f \geq 0, \quad \int_{\mathbf{L}_e(G)} f \, d\nu = 1.$$

## 1. Introduction

Sur une variété riemannienne complète  $M$ , Otto et Villani [19] ont montré que l'inégalité de Sobolev logarithmique

$$\int_M f^2 \log \frac{f^2}{\|f\|_{L^2}^2} \, d\mu \leq 2C \int_M |\nabla f|^2 \, d\mu, \quad f \in C_0(M) \quad (1)$$

implique l'inégalité de transport de Talagrand :

$$W_2^2(f\mu, \mu) \leq C \int_M f \log f \, d\mu, \quad f \geq 0, \quad \int_M f \, d\mu = 1 \quad (2)$$

où  $\mu(dx) = e^{V(x)} dx$  est une mesure de probabilité sur  $M$  et

$$W_2^2(f\mu, \mu) = \inf_{\pi \in \mathcal{C}(f\mu, \mu)} \int_{M \times M} d^2(x, y) \pi(dx, dy) \quad (3)$$

avec  $\mathcal{C}(f\mu, \mu)$  désignant l'ensemble des mesures de probabilités sur  $M \times M$ , de marginales  $f\mu$  et  $\mu$ . L'existence du flot de difféomorphismes  $\phi_s : M \rightarrow M$  associé à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{d}{ds} \phi_s(x) = -(\nabla \log P_{t+s} f)(\phi_s(x)), \quad \phi_0(x) = x, \quad t > 0 \text{ donné} \quad (4)$$

est un ingrédient important dans leur approche, où  $(P_t)_{t \geq 0}$  désigne le semi-groupe associé à la forme de Dirichlet  $\mathcal{E}(f) = \int_M |\nabla f|^2 \, d\mu$ . Dans [2], Bobkov, Gentil et Ledoux ont donné une approche alternative en établissant l'hypercontractivité du semi-groupe de Hamilton–Jacobi

$$(Q_t f)(x) = \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{1}{2t} d^2(x, y) \right\}. \quad (5)$$

Nous nous référons à Ledoux [16] pour un survey sur ce sujet. En dimension infinie, une avancée significative a été effectuée par Feyel et Üstünel dans [12], où le transport de Monge et l'inégalité de Talagrand sur l'espace de Wiener  $(W, H, \mu)$  sont étudiées, la distance riemannienne  $d$  dans (3) étant remplacée par la distance de Cameron–Martin  $d_H$ . Dans ce cas,  $d_H : W \times W \rightarrow [0, +\infty]$  est semi-continue inférieurement. Diverses études pour des mesures de diffusion sont récemment faites dans [3,21].

Soit  $G$  un groupe de Lie compact et connexe, d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  munie d'une métrique  $\text{Ad}_G$  invariante. Sur le groupe  $\mathbf{P}_e(G)$  des chemins continus définis sur  $[0, 1]$ , partant de l'élément neutre  $e$ , on définit la distance Cameron–Martin :  $d^{\mathcal{P}}(\xi_1, \xi_2) = (\int_0^1 |v(t)^{-1} \frac{d}{dt} v(t)|_{\mathcal{G}}^2 dt)^{1/2}$  où  $v = \xi_1^{-1} \xi_2$ . L'inégalité de transport pour  $d^{\mathcal{P}}$  est établie dans [10]. Considérons le groupe des lacets  $\mathbf{L}_e(G) = \{\ell : [0, 1] \rightarrow G \text{ continu}; \ell(0) = \ell(1) = e\}$ . Nous allons étudier la distance riemannienne  $d_L$  sur  $\mathbf{L}_e(G)$  et établir une inégalité de transport. Dans ce cas de dimension infinie, la résolution de l'équation du type (4) est une tâche difficile, tandis que la définition  $Q_t$  dans (5) se généralise aisément. L'objet de ce travail est d'établir les ingrédients nécessaires afin d'appliquer l'approche de [2].

## 2. Distance riemannienne

Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , munie d'une  $\text{Ad}_G$  invariante métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ . Soit  $H_0(\mathcal{G}) = \{h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}; h(0) = h(1) = 0, |h|_{H_0}^2 = \int_0^1 |\dot{h}(\theta)|_{\mathcal{G}}^2 d\theta < +\infty\}$  où  $\dot{h}(\theta) = \frac{d}{d\theta}h(\theta)$ . Le groupe  $\mathbf{L}_e(G)$  est muni de la distance uniforme et  $H_0(\mathcal{G})$  est muni d'un crochet de Lie défini par  $[h_1, h_2](\theta) = [h_1(\theta), h_2(\theta)]$ . Soit  $F : \mathbf{L}_e(G) \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction cylindrique sous la forme

$$F(\ell) = f(\ell(\theta_1), \dots, \ell(\theta_N)), \quad f \in C^\infty(G^N), \quad 0 < \theta_1 < \dots < \theta_N < 1.$$

On notera par  $\text{Cylin}(\mathbf{L}_e)$  l'espace des fonctions cylindriques sur  $\mathbf{L}_e(G)$ . Considérons l'espace de Hilbert suivant  $H(H_0(\mathcal{G})) = \{z(t) = \int_0^t z'(s) ds; \|z\|^2 = \int_0^1 |z'(s)|_{H_0}^2 ds < +\infty\}$ .

**Définition 2.1.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}_e(G)$  une courbe continue. On dit qu'elle est admissible s'il existe  $z \in H(H_0(\mathcal{G}))$  tel que pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, \theta) = \gamma(t, \theta) z'(t)(\theta), \quad \gamma(0, \theta) = e. \tag{6}$$

**Définition 2.2.** Pour une courbe admissible  $\gamma$  dans  $\mathbf{L}_e(G)$ , on définit  $L(\gamma) = \sqrt{\int_0^1 |z'(s)|_{H_0}^2 ds}$ ; dans d'autres cas,  $L(\gamma) = +\infty$ .

Maintenant soient  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{L}_e(G)$ , on définit

$$d_L(\ell_1, \ell_2) = \inf\{L(\gamma); \gamma(0) = \ell_1, \gamma(1) = \ell_2\}. \tag{7}$$

Il est aisé de voir que  $d_L$  est invariante à gauche :  $d_L(\ell\ell_1, \ell\ell_2) = d_L(\ell_1, \ell_2) = d_L(e, \ell_1^{-1}\ell_2)$  où  $e$  désigne le lacet d'identité. La distance  $d_L$  est déjà apparue dans [11].

**Proposition 2.3.** Nous avons les propriétés suivantes (i) Pour  $d_L(\ell_1, \ell_2) < +\infty$ , il existe une courbe admissible  $\gamma$  telle que  $d_L(\ell_1, \ell_2) = L(\gamma)$ .

(ii) L'ensemble  $B_R = \{\ell \in \mathbf{L}_e(G); d_L(e, \ell) \leq R\}$  est compact dans  $\mathbf{L}_e(G)$ .

(iii) La fonction  $(\ell_1, \ell_2) \rightarrow d_L(\ell_1, \ell_2)$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathbf{L}_e(G) \times \mathbf{L}_e(G)$ .

(iv) Soit  $K$  un ensemble compact dans  $\mathbf{L}_e(G)$ , alors  $K_R = \{\ell \in \mathbf{L}_e(G); d_L(\ell, K) \leq R\}$  est compact dans  $\mathbf{L}_e(G)$ , où

$$d_L(\ell, K) = \inf\{d_L(\ell, k); k \in K\}.$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique du processus d'Ornstein–Uhlenbeck sur  $\mathbf{L}_e(G)$ , Hino et Ramirez ont introduit la distance  $d_I(\ell_1, \ell_2) = \inf\{\hat{L}(\gamma); \gamma(0) = \ell_1, \gamma(1) = \ell_2\}$  dans [15], où

$$\hat{L}(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i \in \Delta} d^{\mathcal{P}}(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})); \Delta \text{ subdivision de } [0, 1]\right\}. \tag{8}$$

Peu de propriétés ont été dégagées à partir de cette définition.

**Théorème 2.4.** Les deux distances  $d_I$  et  $d_L$  coïncident.

**Démonstration.** La distance  $d_I$  est invariante à gauche, il suffit de montrer  $d_I(e, \ell) = d_L(e, \ell)$ . Soit  $\ell \in \mathbf{L}_e(G)$  tel que  $d_L(e, \ell) < +\infty$ . Considérons la courbe admissible  $\gamma$  reliant  $e$  et  $\ell$  telle que  $L(\gamma) = d_L(e, \ell)$ . Soit  $\Delta$  une subdivision de  $[0, 1]$ , notons par  $v_i = \gamma(s_{i-1})^{-1}\gamma(s_i)$  pour  $i \in \Delta$ . Alors

$$v_i(\theta)^{-1} \frac{dv_i}{d\theta} = \text{Ad}(\gamma(s_i, \theta)^{-1}) \left[ \frac{d}{d\theta} \gamma(s_i, \theta) \cdot \gamma(s_i, \theta)^{-1} - \frac{d}{d\theta} \gamma(s_{i-1}, \theta) \cdot \gamma(s_{i-1}, \theta)^{-1} \right].$$

Notons par  $\widehat{D}_s$  la dérivée covariante à droite, alors  $|v_i(\theta)^{-1} \frac{dv_i}{d\theta}|_{\mathcal{G}} \leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} |\widehat{D}_s \frac{d}{d\theta} \gamma(s, \theta)|_{\mathcal{G}} ds$ . Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\sum_i d^{\mathcal{P}}(\gamma(s_{i-1}), \gamma(s_i)) \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \left| \widehat{D}_s \frac{d}{d\theta} \gamma(s, \theta) \right|_{\mathcal{G}}^2 ds d\theta}.$$

Cette dernière quantité est égale à  $\sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |D_{\theta} \frac{d}{ds} \gamma(s, \theta)|_{\mathcal{G}}^2 ds d\theta} = L(\gamma)$ , où  $D_{\theta}$  désigne la dérivée covariante à gauche. Il s'ensuit que  $\widehat{L}(\gamma) \leq L(\gamma)$ . D'où  $d_I(\mathbf{e}, \ell) \leq d_L(\mathbf{e}, \ell)$ . Réciproquement, soit  $U$  un voisinage de  $e$  dans  $G$  sur lequel la fonction log est définie. Alors pour  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $U_{\varepsilon} \subset U$  tel que pour  $v \in \mathbf{L}_e(G)$  vérifiant  $v(\theta) \in U_{\varepsilon}$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , on a

$$|\log v|_{H_0} \leq (1 + \varepsilon) d^{\mathcal{P}}(\mathbf{e}, v). \tag{9}$$

Soit  $\ell \in \mathbf{L}_e(G)$  tel que  $d_I(\mathbf{e}, \ell) < +\infty$ . Il existe une courbe continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}_e(G)$  reliant  $\mathbf{e}$  et  $\ell$  telle que  $\widehat{L}(\gamma) \leq d_I(\mathbf{e}, \ell) + \varepsilon$ . Soit  $\Delta$  une subdivision assez fine telle que  $v_i(\theta) := \gamma(s_{i-1}, \theta)^{-1} \gamma(s_i, \theta) \in U_{\varepsilon}$ ,  $\theta \in [0, 1]$ . Soit  $h_i = \log v_i$  et définissons  $z \in H(H_0(\mathcal{G}))$  par  $z'(t) = h_i$  pour  $t \in [s_{i-1}, s_i]$ . Considérons la courbe  $\tilde{\gamma}$  associée à  $z$  par l'Éq. (6). Alors  $\tilde{\gamma}(1, \theta) = e^{h_1(\theta)} \dots e^{h_N(\theta)} = v_1(\theta) \dots v_N(\theta) = \gamma(1, \theta) = \ell$ . Par suite,

$$d_L(\mathbf{e}, \ell) \leq \sqrt{\int_0^1 |z'(t)|_{H_0}^2 dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (s_i - s_{i-1}) |h_i|_{H_0}^2} \leq \sum_{i=1}^N |h_i|_{H_0},$$

qui est majorée, compte tenu de (9) et (8), par  $(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^N d^{\mathcal{P}}(\mathbf{e}, v_i) \leq (1 + \varepsilon) \widehat{L}(\gamma) \leq (1 + \varepsilon)(d_I(\mathbf{e}, \ell) + \varepsilon)$ . Faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient  $d_L(\mathbf{e}, \ell) \leq d_I(\mathbf{e}, \ell)$ .  $\square$

### 3. Théorème de Rademacher

Désormais on notera par  $\mu$  la mesure de Wiener sur  $\mathbf{L}_e(G)$ , la loi du pont brownien sur  $G$  attaché à l'identité. La quasi-invariance de  $\mu$  est démontrée par Malliavin–Malliavin [18] :

$$\int_{\mathbf{L}_e(G)} F(\ell e^h) d\mu(\ell) = \int_{\mathbf{L}_e(G)} F(\ell) K_h(\ell) d\mu(\ell), \quad h \in H_0(\mathcal{G}) \tag{10}$$

avec  $K_h \in \bigcap_{p>1} L^p(\mathbf{L}_e(G), \mu)$ . De plus, pour toute fonction  $f \in L^p(\mathbf{L}_e(G), \mu)$  avec un certain  $p > 1$ ,

$$\left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\mathbf{L}_e(G)} f(\ell) K_{\varepsilon h}(\ell) d\mu(\ell) \right\}_{\varepsilon=0} = \int_{\mathbf{L}_e(G)} f \delta(h) d\mu,$$

où  $\delta(h)$  désigne la divergence de  $h$ . On a (voir [9])  $\|\delta(h)\|_{L^2(\mu)} \leq C|h|_{H_0}$ , avec une constante  $C > 0$ . Soit  $F \in L^2(\mathbf{L}_e(G), \mu)$ . On dit qu'elle est dans  $\mathbf{D}_1^2(\mu)$  s'il existe  $\nabla F \in L^2(\mathbf{L}_e(G), H_0(\mathcal{G}))$  tel que pour tout  $h \in H_0(\mathcal{G})$ ,  $\langle \nabla F, h \rangle_{H_0} = D_h F$ , où  $(D_h F)(\ell) = \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} F(\ell e^{\varepsilon h}) \right\}_{\varepsilon=0}$  existe dans  $L^{2-}$ .

**Définition 3.1.** Soit  $F : \mathbf{L}_e(G) \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction mesurable. On dit qu'elle est  $d_L$ -lipschitzienne s'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|F(\ell_1) - F(\ell_2)| \leq M d_L(\ell_1, \ell_2)$ , pour  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{L}_e(G)$ .

La meilleure constante  $M$  est notée par  $\|F\|_{\text{Lip}}$ .

**Théorème 3.2.** Soit  $F \in L^2(\mu)$  une fonction  $d_L$ -lipschitzienne. Alors  $F \in \mathbf{D}_1^2(\mu)$  et  $|\nabla F|_{H_0} \leq \|F\|_{\text{Lip}}$ .

**Démonstration.** Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\varphi(s) = F(\ell e^{s h})$  pour  $\ell$  fixé, et  $\gamma(t, \theta) = \ell(\theta) e^{s_1 h(\theta)} e^{t(s_2 - s_1) h(\theta)}$  pour  $s_1, s_2 \in [0, 1]$ . Alors  $\gamma$  relie  $\ell e^{s_1 h}$  et  $\ell e^{s_2 h}$  et  $\gamma(t, \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, \theta) = (s_2 - s_1) h(\theta)$ . Donc  $d_L(\ell e^{s_1 h}, \ell e^{s_2 h}) \leq$

$|s_2 - s_1||h|_{H_0}$  et  $|F(\ell e^{s_1 h}) - F(\ell e^{s_2 h})| \leq M|s_2 - s_1||h|_{H_0}$ . Alors  $\varphi$  est dérivable presque partout sur  $[0, 1]$ , de dérivées majorées par  $M|h|_{H_0}$ . Soit

$$\Lambda_h = \left\{ (\ell, s); \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\ell e^{(s+\varepsilon)h}) - F(\ell e^{s h})}{\varepsilon} \text{ existe} \right\}. \tag{11}$$

Alors pour tout  $\ell$ ,  $\mathbf{1}_{\Lambda_h}(\ell, s) = 1$  presque partout sur  $[0, 1]$ . Donc  $(\mu \otimes \lambda)(\Lambda_h) = 1$  où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$ . Or par (11),  $\mathbf{1}_{\Lambda_h}(\ell, s) = \mathbf{1}_{\Lambda_h}(\ell e^{s h}, 0)$ . Par suite, en utilisant (10),

$$1 = \int_{\mathbf{L}_e(G)} \int_0^1 \mathbf{1}_{\Lambda_h}(\ell e^{s h}, 0) \, ds \, d\mu(\ell) = \int_0^1 \left( \int_{\mathbf{L}_e(G)} \mathbf{1}_{\Lambda_h}(\ell, 0) K_{sh}(\ell) \, d\mu(\ell) \right) \, ds.$$

Il en résulte que  $\mathbf{1}_{\Lambda_h}(\ell, 0) = 1$  pour  $\mu$  presque partout. Combinant ceci avec le théorème de la convergence dominée,  $D_h F$  existe dans  $L^{2-}$  et  $|D_h F| \leq M|h|_{H_0}$ . D'autre part, pour toute fonction cylindrique  $\Phi$ ,

$$\int_{\mathbf{L}_e(G)} D_h F \Phi \, d\mu = \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\mathbf{L}_e(G)} F(\ell) \Phi(\ell e^{-\varepsilon h}) K_{\varepsilon h} \, d\mu(\ell) \right\}_{\varepsilon=0} = \int_{\mathbf{L}_e(G)} F D_h^* \Phi \, d\mu \tag{12}$$

où  $D_h^* \Phi = -\langle \nabla \Phi, h \rangle_{H_0} + \Phi \delta(h)$ . Maintenant, procédant comme dans [7], on obtient le résultat.  $\square$

#### 4. Inégalité de transport

Soit  $W_0(\mathcal{G}) = \{w : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G} \text{ continue; } w(0) = w(1) = 0\}$ . Il existe un mouvement brownien  $(w_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $W_0(\mathcal{G})$ , ayant  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$  comme opérateur de covariance. Pour  $\theta \in [0, 1]$ , considérons l'e.d.s. de Stratanovich suivante

$$d_t g_w(t, \theta) = g_w(t, \theta) \circ d_t w(t, \theta), \quad g_w(0, \theta) = e.$$

Il est démontré (voir [17]) que  $(t, \theta) \rightarrow g_w(t, \theta)$  admet une version continue, que nous noterons de la même façon. Alors  $t \rightarrow g_w(t, \cdot)$  est un processus continu sur  $\mathbf{L}_e(G)$ . Soit  $\nu_T$  la loi de  $w \rightarrow g_w(T, \cdot)$  sur  $\mathbf{L}_e(G)$ . D'après Driver–Smirmurthy [6],  $\nu := \nu_1$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ . De plus,  $q = \frac{d\nu}{d\mu}$  est une fonction bornée. Soit  $\hat{\mathcal{E}}(f, g) = \int_{\mathbf{L}_e(G)} \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{H_0} \, d\nu$  pour  $f, g \in \text{Cylin}(\mathbf{L}_e)$ . D'après Driver [4] (voir aussi [8]), la formule d'intégration par parties pour  $\nu$  existe; par suite,  $\hat{\mathcal{E}}$  est fermable. On note par  $\mathbf{D}_1^2(\nu)$  le domaine de la forme de Dirichlet obtenue. D'autre part, par un résultat de Aida [1], l'espace  $\text{Cylin}(\mathbf{L}_e)$  est dense dans  $\mathbf{D}_1^2(\mu)$ . Par suite  $\mathbf{D}_1^2(\mu) \subset \mathbf{D}_1^2(\nu)$ . D'après Driver et Lohrentz [5]:

$$\int_{\mathbf{L}_e(G)} F^2 \log \frac{|F|^2}{\|F\|_{L^2(\nu)}^2} \, d\nu \leq 2C_1 \int_{\mathbf{L}_e(G)} |\nabla F|_{H_0}^2 \, d\nu, \quad F \in \mathbf{D}_1^2(\nu). \tag{13}$$

Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures de probabilités sur  $\mathbf{L}_e(G)$ . On définit la distance de Wasserstein  $W_2(\mu_1, \mu_2)$  entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$  comme (3) en utilisant la distance  $d_L$  sur  $\mathbf{L}_e(G)$ .

**Théorème 4.1.** *Nous avons*

$$W_2(\nu, f\nu)^2 \leq C_1 \int_{\mathbf{L}_e(G)} f \log f \, d\nu, \quad \text{pour } f \geq 0, \int_{\mathbf{L}_e(G)} f \, d\nu = 1. \tag{14}$$

**Démonstration.** Soit  $F : \mathbf{L}_e(G) \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction bornée  $d_L$  lipschitzienne, on définit

$$(Q_t F)(\ell) = \inf_{\ell' \in \mathbf{L}_e(G)} \left\{ F(\ell') + \frac{1}{2t} d_L(\ell, \ell')^2 \right\}.$$

Alors  $Q_t$  préserve la classe des fonctions bornées  $d_L$  lipschitziennes, et  $D_t^+ Q_t F \leq -\frac{1}{2} |\nabla Q_t F|_{H_0}^2$  pour  $t > 0$  où  $D_t^+ \varphi := \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s}$ . Maintenant d'après [2], on obtient l'inégalité (14) à partir de (13). Pour une discussion détaillée sur  $Q_t$ , nous référons à [20].  $\square$

**Remarque 1.** Soit  $z \in H(H_0(\mathcal{G}))$ . En faisant intervenir  $(A_w z)(t, \theta) = \int_0^t \text{Ad}_{g_w(s, \theta)} z'(s)(\theta) ds$ , la méthode de Girsanov (voir [12,3]) a été développée dans [10] pour obtenir une inégalité de transport sur  $\mathbf{L}_e(G)$ , mais relative à la distance uniforme, car  $A_w$  n'est pas un opérateur borné de  $H(H_0(\mathcal{G}))$  dans  $H(H_0(\mathcal{G}))$ , mais de  $H(H_0(\mathcal{G}))$  dans  $C([0, 1] \times [0, 1], \mathcal{G})$ .

**Remarque 2.** Nous n'avons obtenu que l'inégalité de Hamilton–Jacobi par le manque de la compacité locale. Sur l'espace de Wiener, l'égalité est obtenue par Gentil [13], car  $\mathcal{Q}_t$  préserve la classe des fonctions cylindriques dans ce cas.

**Remarque 3.** Hino et Ramirez [15] a prouvé aussi un théorème de Rademacher en utilisant la méthode de [14].

## Références

- [1] S. Aida, Sobolev spaces over loop groups, *J. Funct. Anal.* 127 (1995) 155–172.
- [2] S. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux, Hypercontractivity of Hamilton–Jacobi equations, *J. Math. Pure Appl.* 80 (2001) 669–696.
- [3] H. Djellout, A. Guillin, L. Wu, Transportation cost-information inequalities for random dynamical system and diffusions, *Ann. Probab.* 32 (2004) 2702–2732.
- [4] B. Driver, Integration by parts and quasi-invariance for heat measures on loop groups, *J. Funct. Anal.* 149 (1997) 470–547.
- [5] B. Driver, T. Lohrentz, Logarithmic Sobolev inequalities for pinned loop groups, *J. Funct. Anal.* 140 (1996) 381–448.
- [6] B. Driver, V.K. Srimurthy, Absolute continuity of heat kernel measure with pinned Wiener measure on loop groups, *Ann. Probab.* 29 (2001) 691–723.
- [7] O. Enchev, D. Stroock, Rademacher's theorem for Wiener functionals, *Ann. Probab.* 23 (1993) 25–33.
- [8] S. Fang, Integration by parts for heat measures over loop groups, *J. Math. Pures Appl.* 78 (1999) 877–894.
- [9] S. Fang, J. Franchi, De Rham–Hodge–Kodaira operator on loop groups, *J. Funct. Anal.* 148 (1997) 391–407.
- [10] S. Fang, J. Shao, Transportation cost inequalities on path and loop groups, *J. Funct. Anal.* 218 (2005) 293–317.
- [11] S. Fang, T. Zhang, Large deviations for the Brownian motion on loop groups, *J. Theoret. Probab.* 14 (2001) 463–483.
- [12] D. Feyel, A.S. Üstünel, Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampère equation on Wiener space, *Probab. Theory Related Fields* 128 (2004) 347–385.
- [13] I. Gentil, Inégalités de Sobolev logarithmiques et hypercontractivité en mécanique statistique et en EDP, Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.
- [14] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities on loop groups, *J. Funct. Anal.* 102 (1991) 268–313.
- [15] M. Hino, J.A. Ramirez, Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, *Ann. Probab.* 31 (2003) 1254–1295.
- [16] M. Ledoux, Concentration, Transportation and Functional Inequalities. Instructional Conference on Combinatorial Aspects of Math. Analysis, Edinburgh, 25 March – 5 April, 2002.
- [17] P. Malliavin, Hypocoellipticity in infinite dimension, in: M. Pinsky (Ed.), *Diffusion Processes and Related Problem in Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 17–33.
- [18] M.P. Malliavin, P. Malliavin, Integration on loop groups, I. Quasi-invariant measures, *J. Funct. Anal.* 93 (1990) 207–237.
- [19] F. Otto, C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* 173 (2000) 361–400.
- [20] J. Shao, Hamilton–Jacobi semi-groups in infinite dimensional spaces. Prépublication de l'Université de Bourgogne, Février 2005.
- [21] F.Y. Wang, Probability distance inequalities on Riemannian manifolds and path spaces, *J. Funct. Anal.* 206 (2004) 167–190.