

Équations aux dérivées partielles

Solutions globales de systèmes hyperboliques non linéaires sur un cône caractéristique

Marcel Dossa^a, Faustin Touadera^b

^a *Département de mathématiques, faculté des sciences, université de Yaoundé I, B.P. 812 Yaoundé, Cameroun*

^b *Département de mathématiques, faculté des sciences, université de Bangui, B.P. 908, Bangui, République centrafricaine*

Reçu le 12 février 2005 ; accepté après révision le 1^{er} septembre 2005

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

On résout globalement, c'est-à-dire dans la totalité du domaine non borné \mathcal{Y} intérieur à un demi-cône infini caractéristique \mathcal{C} , le problème de Cauchy pour une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles hyper quasi linéaires hyperboliques du second ordre, les données initiales petites en norme et décroissantes à l'infini en un sens convenable, étant prescrites sur \mathcal{C} . **Pour citer cet article :** *M. Dossa, F. Touadera, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Global solutions of non linear hyperbolic systems on a characteristic cone. We solve globally, in the unbounded domain \mathcal{Y} interior to an infinite characteristic cone \mathcal{C} , the Cauchy problem for a class of systems of non linear hyperbolic equations of the second order. The initial data, with small norm and verifying some decay property at infinity, are given on \mathcal{C} . **To cite this article :** *M. Dossa, F. Touadera, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $n \geq 3$ be an odd integer. We consider the Cauchy problem (1) where \mathcal{Y} is the unbounded domain interior to the half-cone \mathcal{C} in \mathbb{R}^{n+1} defined by the equation $x^0 = r$, $r = [\sum_{i=1}^n (x^i)^2]^{1/2}$.

- The unknown function $v = (v^A)$, $A = 1, 2, \dots, N$ is a vector valued function having values in \mathbb{R}^N ,
- \square is the wave operator in Minkowski space–time (\mathbb{R}^{n+1}, η) where $\eta = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$,
- the function $f(v, w, z) = (f^A(v, w, z))$ is a vector-valued function having values in \mathbb{R}^N , which is a C^∞ function on $U \times \mathbb{R}^{N(n+1)(n+2)/2}$ of the variables $v = (v^A)$, $w = (w_\mu^A)$, $z = (z_{\mu\nu}^A)$ ($A = 1, \dots, N$; $\mu, \nu = 0, \dots, n$) where U is an open subset of \mathbb{R}^N containing the point 0,

Adresses e-mail : marceldossa@yahoo.fr (M. Dossa), touadera@yahoo.fr (F. Touadera).

- $f^A(v, w, z) = \delta_B^A \alpha^{\mu\nu}(v) z_{\mu\nu}^B + \beta^A(v, w)$; $f(0, 0, 0) = 0$ and $f'(0, 0, 0) = 0$,
- whenever $n = 3$, $f^{(2)}$ satisfies the null condition of Klainerman (cf. definition and notation in [2]).

The matrix $\Gamma^{\mu\nu}$ defined by $\Gamma^{\mu\nu}(v) = \eta^{\mu\nu} - \alpha^{\mu\nu}(v)$ is of signature $(-, +, +, \dots, +)$ for small v and such that the half-cone \mathcal{C} is characteristic when the problem (1) is considered, that is φ satisfies the relation (6).

We intend to look for global solutions of the characteristic Cauchy problem (1) by using a variant of the conformal compactification method of Choquet–Bruhat and Christodoulou [1,2]. For this purpose, fix on the Einstein cylinder $E_{n+1} = \mathbb{R} \times S_n$, the coordinate system (\bar{X}^μ) defined by $\bar{X}^0 = T \in \mathbb{R}$ (time) and $(\bar{X}^i)_{1 \leq i \leq n}$ is the stereographic coordinates on the sphere S_n , relative to the south pole.

Let $\phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow E_{n+1}$ be the Penrose transformation defined by $\phi(t, x) = (\bar{X}^\mu)$ where (\bar{X}^μ) is given in [2] (relation (9), p. 270) as functions of t and x . We proceed, as in the case of the usual Cauchy problem (cf. [2]) by the change of the unknown function (7), the conformal factor Ω being defined in E_{n+1} by the relations (13) of [2] (page 271).

Therefore, using the geometric notations as defined in (4), the Cauchy problem (1) becomes the transformed Cauchy problem (8) where:

- $g = \Omega^2 \tilde{g}$, $\tilde{g} = (\phi^{-1})^* \eta$, g being the standard hyperbolic metric on E_{n+1} , \square_g is the wave operator on E_{n+1} . F is a C^∞ function of its variables which can be extended to a C^∞ function on all of the Einstein cylinder E_{n+1} ; ψ is defined by (9).

It appears that a direct approach in the transformed problem (8) presents some technical difficulties due to the simultaneous presence of two singular points $p_0 = (0, \dots, 0)$ and $p_1 = (\pi, 0, \dots, 0)$ on the boundary of $\bar{\mathcal{Y}}_0$. In order to overcome these difficulties we extend the transformed problem (8) into a suitable bounded domain $\hat{\mathcal{Y}}$ such that p_1 is a regular point of $\partial \hat{\mathcal{Y}}$. Then we obtain respectively in the quasi-linear or semi-linear cases, the so called ‘extended transformed Cauchy problems’ (10) or (11), the initial data $\tilde{\psi}$ being a suitable extension of ψ , which verifies (12). The problems (10) and (11) are globally solved, under a smallness hypothesis on the norm of $\tilde{\psi}$, by the same fixed point method and in the same function spaces as in [3]. By choosing the initial data φ of the problem (1) in a function space X such that it verifies (13), we can deduce from the global solution of the characteristic problems (10) and (11), by using the inverse conformal transformation ϕ^{-1} , a global existence result for the characteristic Cauchy problem (1).

1. Introduction

On considère, dans le domaine non borné \mathcal{Y} intérieur au demi-cône \mathcal{C} de \mathbb{R}^{n+1} d’équation $x^0 = r$, $r = [\sum_{i=1}^n (x^i)^2]^{1/2}$, le problème de Cauchy suivant :

$$\square v = f(v, \partial v, \partial^2 v) \quad \text{dans } \mathcal{Y}, \quad v = \varphi \quad \text{sur } \mathcal{C} \tag{1}$$

où \square est l’opérateur des ondes sur l’espace–temps de Minkowski (\mathbb{R}^{n+1}, η) avec $\eta = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$, la donnée initiale φ étant choisie de telle sorte que le problème de Cauchy (1) soit caractéristique. Moyennant une hypothèse de structure convenable sur la non linéarité f , le choix d’un cadre fonctionnel adéquat, ainsi qu’une hypothèse de petitesse sur la norme de φ , on résout globalement le problème de Cauchy caractéristique (1). La méthode de solution utilisée combine une variante de la méthode de compactification conforme de Choquet–Bruhat et Christodoulou [1,2] avec les techniques de solution locale connues jusque là [3].

2. Transformation de Penrose et notations géométriques sur le cylindre d’Einstein ; notations et espaces fonctionnels utilisés sur le cône \mathcal{C}

Soit n un entier ≥ 3 . Soit S_n la sphère unité de dimension n . Soit $E_{n+1} = \mathbb{R} \times S_n$ le cylindre d’Einstein muni de sa métrique hyperbolique canonique g . Fixons sur E_{n+1} le système de coordonnées $(\bar{X}^\mu)_{\mu=0,1,\dots,n}$ tel que $\bar{X}^0 \equiv T$ décrit \mathbb{R} (le temps) et $(\bar{X}^i)_{1 \leq i \leq n}$ est le système de coordonnées stéréographiques relatif au pôle Sud sur la sphère S_n . Soit alors ϕ la transformation de Penrose définie par :

$$\phi(t, x) = (\bar{X}^\mu)_{\mu=0,1,\dots,n} \tag{2}$$

les \bar{X}^μ étant données en fonction de t et x par la relation (9) de [2] (p. 270).

On a alors :

$$g = \Omega^2 \tilde{g}, \quad \tilde{g} = (\phi^{-1})^* \eta \tag{3}$$

où le facteur de conformité Ω est donné par la relation (13) de [2] (p. 271).

Posons $\bar{A} = [\sum_{i=1}^n (\bar{X}^i)^2]^{1/2}$ et introduisons les notations géométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{Y}}_0 \equiv \phi(\mathcal{Y}) = \left\{ (\bar{X}^\mu) \in \mathbb{R}^{n+1} : 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{2} \bar{A} \right) \leq \bar{X}^0 < \pi - 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{2} \bar{A} \right) \right\}, \\ \bar{\mathcal{Y}} = \left\{ (\bar{X}^\mu) \in \mathbb{R}^{n+1} : 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{2} \bar{A} \right) \leq \bar{X}^0 < +\infty \right\}, \quad \bar{\mathcal{C}} = \left\{ (\bar{X}^\mu) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{X}^0 = 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{2} \bar{A} \right) \right\}, \\ \bar{\mathcal{C}}_t = \bar{\mathcal{C}} \cap \{ \bar{X}^0 \leq t \}; \quad \text{on a alors } \bar{\mathcal{C}}_{\pi/2} = \phi(\mathcal{C}), \\ \bar{\mathcal{Y}}^{(\alpha, \beta)} = \left\{ (\bar{X}^\mu) \in \mathbb{R}^{n+1} : 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{2} \bar{A} \right) \leq \bar{X}^0 < \pi + \alpha - 2\beta \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{2} \bar{A} \right), 0 \leq \bar{X}^0 \leq \pi \right\}, \\ \bar{\mathcal{Y}}^{(\alpha)} = \bar{\mathcal{Y}}^{(\alpha, 1)}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux constantes } > 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Introduisons maintenant les notations et espaces fonctionnels utilisés sur \mathcal{C} .

Soit n un entier ≥ 3 . Soit \mathcal{C} le demi-cône de sommet 0 dans \mathbb{R}^{n+1} d'équation $x^0 = r$. Soit \mathcal{Y} l'intérieur de \mathcal{C} . Si $t \in]0, +\infty[$, on pose : $\mathcal{C}_t = \mathcal{C} \cap \{x^0 \leq t\}$, $\Sigma_t = \mathcal{C} \cap \{x^0 = t\}$.

Pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{(\partial x^1)^{\beta_1} \dots (\partial x^n)^{\beta_n}}$.

Pour $v = (v^I)$ définie sur \mathcal{C} , on pose :

$$\|v\|_{H^{l,p}(\Sigma_\tau, \mathcal{C})} = \left[\sum_{I, |\beta| \leq p} (1 + \tau^2)^{l+|\beta|} \int_{\Sigma_\tau} |\partial^\beta v^I|^2 d\sigma(\Sigma_\tau) \right]^{1/2}$$

(si le deuxième membre existe), où $d\sigma(\Sigma_\tau)$ est la mesure induite sur Σ_τ par $dx^1 \dots dx^n$.

- $C_\infty^\infty(\mathcal{Y})$ est l'espace des restrictions à \mathcal{Y} des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^{n+1} dont les dérivées de tous ordres sont nulles en 0.
- Si p est un entier ≥ 1 , $D^p(\mathcal{C})$ est l'espace des fonctions défini par la norme

$$\|X\|_{D^p(\mathcal{C})} = \sum_{l=0}^{2p-1} \operatorname{Ess\,sup}_{\tau \in]0, +\infty[} (\operatorname{Arctg} 2\tau)^{-2p+l+(3-n)/2} \|X\|_{H^{l,l}(\Sigma_\tau, \mathcal{C})}$$

- $A^p(\mathcal{C})$ est l'espace des restrictions à \mathcal{C} des fonctions X de $C_\infty^\infty(\mathcal{Y})$ qui sont telles que $\|X\|_{D^p(\mathcal{C})}$ soit finie.
- $\widehat{D}^p(\mathcal{C})$ est la fermeture de $A^p(\mathcal{C})$ dans $D^p(\mathcal{C})$.
- $\widehat{D}_0^p(\mathcal{C})$ est la fermeture dans $D^p(\mathcal{C})$ de l'espace des restrictions à \mathcal{C} des fonctions de $\mathcal{D}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n) \cap C_\infty^\infty(\mathcal{Y})$.

Définition 2.1. Une fonction f de classe C^∞ des variables (x^0, x^1, \dots, x^n) définie sur \mathbb{R}^{n+1} à valeurs dans \mathbb{R}^N est appelée pseudo polynôme de degré m s'il existe un polynôme P en $\bar{X}^0, \dots, \bar{X}^n$ de degré m tel que $f(x^\alpha) = (\Omega \circ \phi)^{(n-1)/2}(x^\alpha) \cdot (P \circ \phi)(x^\alpha)$, ϕ étant la transformation de Penrose.

On note $\mathcal{P}S^m$ l'espace des pseudo-polynômes de degré $\leq m$ à valeurs dans \mathbb{R}^N ; on le munit de la norme : $\|f\|_{\mathcal{P}S^m} = \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha P(0)|$, où $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial \bar{X}^0)^{\alpha_0} \dots (\partial \bar{X}^n)^{\alpha_n}}$.

3. Enoncé des résultats d'existence globale obtenus

On distinguera deux cas : le cas semi-linéaire et le cas quasi-linéaire.

1) Le cas semi-linéaire

On considère le problème de Cauchy semi-linéaire caractéristique :

$$\square v = f(v, \partial v) \quad \text{dans } \mathcal{Y}, \quad v = \varphi \quad \text{sur } \mathcal{C}. \tag{5}$$

L'inconnue $v = (v^A)$ est une fonction vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}^N .

La fonction $f(v, w) = (f^A(v, w))$ est une fonction vectorielle des arguments $v = (v^A)$ et $w = (w_\mu^A)$ ($A = 1, \dots, n$; $\mu = 0, 1, \dots, n$) à valeurs dans \mathbb{R}^N , définie et de classe C^∞ dans $U \times \mathbb{R}^{N(n+1)}$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant 0.

Théorème 3.1. *Supposons que :*

- $f(0, 0) = 0$, $f'(0, 0) = 0$,
- n est impair et $n \geq 3$,
- si $n = 3$, $f^{(2)}$ vérifie la condition nulle de Klainerman (cf. notation et définition de [2]),
- La donnée initiale φ du problème de Cauchy (5) se décompose sous la forme : $\varphi = \bar{\varphi}|_{\mathcal{C}} + \varphi_1$ où $\bar{\varphi} \in \mathcal{PS}^{2m-2}$ et $\varphi_1 \in \widehat{D}^m(\mathcal{C})$ avec $m > \frac{n}{2} + 1$.

Conclusion : en posant $\|\varphi\|_m = \|\bar{\varphi}\|_{\mathcal{PS}^{2m-2}} + \|\varphi_1\|_{\widehat{D}^m(\mathcal{C})}$

- Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que : si $\|\varphi\|_m < \varepsilon$, le problème de Cauchy semi-linéaire caractéristique (5) possède une solution globale (i.e. définie dans tout l'intérieur \mathcal{Y} du demi-cône \mathcal{C}) unique $v \in H_m^{\text{loc}}(\mathcal{Y})$.
- Si f est linéaire par rapport à ∂v , on peut remplacer la condition $m > \frac{n}{2} + 1$ par la condition $m > \frac{n}{2}$.
- Si de plus $m > \frac{n}{2} + 2$, cette solution vérifie la propriété de décroissance à l'infini suivante : Il existe une constante $C > 0$ telle que : $\forall x \in \mathcal{Y}$, $|v(x)| \leq C\{[1 + (t+r)^2][1 + (t-r)^2]\}^{-(n-1)/4}$, où $t = x^0$.

2) Le cas quasi-linéaire

On considère le problème de Cauchy quasi-linéaire (1).

L'inconnue $v = (v^A)$, $A = 1, \dots, N$ est une fonction vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}^N .

Hypothèse (S).

- La fonction $f(v, w, z) = (f^A(v, w, z))$ est une fonction vectorielle des arguments $v = (v^A)$, $w = (w_\mu^A)$, $z = (z_{\mu\nu}^A)$ ($A = 1, \dots, n$; $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$) à valeurs dans \mathbb{R}^N , définie et de classe C^∞ dans $U \times \mathbb{R}^{N(n+1)(n+2)/2}$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant 0.
- $f^A(v, w, z) = \delta_B^A \alpha^{\mu\nu}(v) z_{\mu\nu}^B + \beta^A(v, w)$,
- $f(0, 0, 0) = 0$ et $f'(0, 0, 0) = 0$, si $n = 3$ $f^{(2)}$ vérifie la condition nulle de Klainerman (cf. définition de [2]),
- la matrice $\Gamma^{\mu\nu}$ définie par : $\Gamma^{\mu\nu}(v) = \eta^{\mu\nu} - \alpha^{\mu\nu}(v)$ est de signature $(-, +, \dots, +)$ pour v assez petit de façon que le système d'EDP considéré (1) est hyperbolique.

Hypothèse (C).

- $\varphi \in \widehat{D}_0^m(\mathcal{C})$.
- \mathcal{C} est un demi-cône caractéristique par rapport à $\Gamma^{\mu\nu}(\varphi)$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{C}, \quad \Gamma^{00}(\varphi(x)) + 2 \sum_{i=1}^n \Gamma^{0i}(\varphi(x)) q_i + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^{ij}(\varphi(x)) q_i q_j = 0 \quad (6)$$

$$x = (r, x') \text{ avec } x' = (x^1, \dots, x^n), r = |x'|, q_i = -\frac{x^i}{r}.$$

Théorème 3.2. *Pour n entier impair ≥ 3 et sous les hypothèses (S) et (C), on a :*

- Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que si $\|\varphi\|_{\widehat{D}^m(\mathcal{C})} < \varepsilon$ avec $m > \frac{n}{2} + 1$, le problème de Cauchy quasi-linéaire caractéristique (1) possède une solution globale (c'est-à-dire définie dans tout l'intérieur \mathcal{Y} du demi-cône \mathcal{C}) unique $v \in H_m^{\text{loc}}(\mathcal{Y})$.
- Si de plus $m > \frac{n}{2} + 2$, cette solution vérifie la propriété de décroissance à l'infini suivante :
Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{Y}$, $|v(x)| \leq C\{[1 + (t+r)^2][1 + (t-r)^2]\}^{-(n-1)/4}$ où $t = x^0$.

Remarque 1. Motivations pour le choix de l'espace $\mathcal{PS}^{2m-2} + \widehat{D}^m(\mathcal{C})$ pour les données φ sur \mathcal{C} . Cet espace est tel que si φ lui appartient, alors $\psi = \Omega^{-(n-1)/2}(\varphi \circ \phi^{-1})$ la donnée initiale du problème de Cauchy transformé (8) ci-dessous

sur le cylindre, appartient à l'espace fonctionnel $\mathcal{P}^{2m-2} + \widehat{F}^m(\overline{\mathcal{C}}_{\pi/2})$ utilisé dans [3] pour les données initiales du problème de Cauchy caractéristique sur un cône ; cela permet d'appliquer au problème transformé (8) les méthodes de solution locale développées dans [3].

La présence des poids $(1 + \tau^2)^p$, $p \in \mathbb{N}$, dans la définition de la norme $\|\varphi\|_{\widehat{D}^m(\mathcal{C})}$ exprime une propriété de décroissance à l'infini pour la donnée initiale, qui est imposée par la méthode conforme utilisée.

4. Stratégie de la preuve des Théorèmes 3.1 et 3.2 (voir [4] pour plus de détails)

Pour résoudre globalement le problème (1), faisons, comme dans le cas du problème de Cauchy ordinaire (cf. [2]), le changement de fonctions inconnues :

$$u(p) = \Omega^{-(n-1)/2}(p)(v \circ \phi^{-1})(p) \tag{7}$$

$p = (\overline{X}^\mu)$, Ω étant le facteur de conformité. Alors, les notations géométriques étant celles consignées dans la partie 2, le problème (1) se transforme d'après [2] en :

$$\square_g u - \frac{(n-1)^2}{4} u = F(p, u(p), \nabla u(p), \nabla^2 u(p)) \quad \text{dans } \overline{\mathcal{Y}}_0, \quad u = \psi \quad \text{sur } \overline{\mathcal{C}}_{\pi/2} \tag{8}$$

où :

- \square_g est l'opérateur des ondes sur le cylindre d'Einstein (E_{n+1}, g) ,
- F est une fonction C^∞ des ses arguments, prolongeable en une fonction C^∞ sur tout le cylindre d'Einstein E_{n+1} ,

$$\forall p = (\overline{X}^\mu) \in \overline{\mathcal{C}}_{\pi/2}, \quad \psi(p) = \Omega^{-(n-1)/2}(p)(\varphi \circ \phi^{-1})(p). \tag{9}$$

Il semble difficile de procéder à la résolution directe du problème transformé (8) à cause des difficultés soulevées par la présence simultanée sur la frontière de $\overline{\mathcal{Y}}_0$, de deux points singuliers $p_0 = (0, \dots, 0)$ et $p_1 = (\pi, 0, \dots, 0)$. Pour surmonter ces difficultés, on transforme la singularité p_1 en un point régulier en prolongeant le problème (8) sur un domaine borné $\widehat{\mathcal{Y}}$ de E_{n+1} de sorte que, les notations géométriques étant celles consignées dans (4), on a :

- (i) $\overline{\mathcal{Y}}_0 \subsetneq \widehat{\mathcal{Y}} \subset \overline{\mathcal{Y}}$,
- (ii) la frontière passée de $\widehat{\mathcal{Y}}$, $\widehat{\mathcal{C}}$, contient $\overline{\mathcal{C}}_{\pi/2}$ et est strictement contenue dans $\overline{\mathcal{C}}$,
- (iii) la frontière future de $\widehat{\mathcal{Y}}$ est une réunion d'hypersurfaces régulières isotropes ou spatiales par rapport à g , dont l'une contient le point p_1 comme point régulier.

On a dû distinguer deux cas :

- dans le cas quasi-linéaire, on prend $\widehat{\mathcal{Y}} = \overline{\mathcal{Y}}^{(\alpha, \beta)}$ avec α, β constantes telles que $0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 < \alpha < \beta\pi$,
- dans le cas semi-linéaire, on prend : $\widehat{\mathcal{Y}} = \overline{\mathcal{Y}}^\alpha$ avec α constante telle que $0 < \alpha < \pi$.

Le problème transformé (8) est alors remplacé, dans les cas quasi-linéaire et semi-linéaire, respectivement par les problèmes transformés prolongés :

$$\square_g u - \frac{(n-1)^2}{4} u = F(p, u(p), \nabla u(p), \nabla^2 u(p)) \quad \text{dans } \overline{\mathcal{Y}}^{(\alpha, \beta)}, \quad u = \tilde{\psi} \quad \text{sur } \overline{\mathcal{C}}_{(\pi+\alpha)/(\beta+1)}, \tag{10}$$

$$\square_g u - \frac{(n-1)^2}{4} u = F(p, u(p), \nabla u(p)) \quad \text{dans } \overline{\mathcal{Y}}^\alpha, \quad u = \tilde{\psi} \quad \text{sur } \overline{\mathcal{C}}_{(\pi+\alpha)/2} \tag{11}$$

les données initiales prolongées $\tilde{\psi}$ étant choisies de façon que leur norme soit contrôlable en fonction de celles de ψ :

$$\|\tilde{\psi}\| \leq c\|\psi\|, \tag{12}$$

La résolution globale des problèmes (10), (11) s'effectue, moyennant une hypothèse de petitesse sur la norme de $\tilde{\psi}$, par la même méthode de point fixe et dans le même cadre fonctionnel que dans [3], en particulier la donnée

$\tilde{\psi}$ est choisie dans l'espace fonctionnel $P^{2(m-1)} + \widehat{F}^m(\widehat{C})$ de [3], $P^{2(m-1)}$ étant l'espace des polynômes en (\overline{X}^μ) de degré $\leq 2(m-1)$; dans le cas quasi-linéaire, la partie polynômiale de $\tilde{\psi}$ est choisie nulle.

La donnée initiale φ des problèmes (1) et (5), est alors choisie dans un espace fonctionnel X tel que ψ , la transformée de φ par (9), appartienne à $P^{2(m-1)} + \widehat{F}^m(\overline{C}_{\pi/2})$ et vérifie une inégalité de la forme :

$$\|\psi\| \leq c\|\varphi\|_X. \quad (13)$$

On déduit alors de la résolution globale des problèmes (10) et (11), par transformation conforme inverse ϕ^{-1} , les résultats d'existence globale annoncés dans les Théorèmes 3.1 et 3.2 pour les problèmes de Cauchy caractéristiques (1) et (5).

Références

- [1] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, Existence of global solutions of the Yang–Mills–Higgs and Spinor fields equations in 3 + 1 dimensions, *Ann. École Norm. Supér.* (4) 14 (1981) 481–506.
- [2] D. Christodoulou, Global solutions of non-linear hyperbolic equations for small initial data, *Comm. Pure Appl. Math.* XXXIX (1986) 267–282.
- [3] M. Dossa, Espaces de Sobolev non isotropes à poids et problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un cône caractéristique, *Ann. Inst. H. Poincaré* 66 (1) (1997) 37–107.
- [4] F. Touadera, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Yaoundé 1, 2004.