

Problèmes mathématiques de la mécanique

# Relation de Rankine Hugoniot faible pour les lois de conservation avec contraintes primitives convexes

Bruno Després<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> DSSI, Commissariat à l'énergie atomique, BP12, 91680 Bruyères le Chatel, France

<sup>b</sup> Laboratoire JLL, UPMC, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 21 avril 2005 ; accepté après révision le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 21 novembre 2005

Présenté par Olivier Pironneau

---

## Résumé

Nous présentons une nouvelle inégalité pour les solutions discontinues et contraintes des systèmes de lois de conservation. La contrainte est convexe par rapport à la variable primitive. Nous proposons d'appeler cette inégalité relation de Rankine Hugoniot faible. Divers exemples illustrent l'intérêt potentiel de cette approche. *Pour citer cet article : B. Després, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Weak Rankine Hugoniot relation for conservation laws with convex primitive constraints.** We describe a Weak Rankine Hugoniot relation for constrained discontinuous solutions of conservation laws. The constraint is convex in the primitive variable. Various examples show the potential interest of this approach. *To cite this article: B. Després, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

Let  $\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$  a system of conservation laws equipped with an entropy-entropy flux pair  $E(U), F(U)$ . In many examples one needs to consider a constraint. We assume the constraint is of the form  $V \in K$  where  $V = \nabla_U E \in \mathbb{R}^n$  is the adjoint or primitive variable of  $U \in \mathbb{R}^n$  and  $K$  is a convex set. The simplest example is the linear wave system

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = -\lambda u, \\ \partial_t v + \partial_x u = -\lambda v \end{cases} \quad (1)$$

where  $\lambda$  is a Lagrange multiplier to guaranty the convex constraint  $u^2 + v^2 \leq 1$ . For technical reasons it is better to define  $K_- \subset K$  a set of admissible solutions and  $K_+$  a closed convex larger than  $K$

---

Adresse e-mail : [despres@ann.jussieu.fr](mailto:despres@ann.jussieu.fr) (B. Després).

$$K_- \subset K \subset K_+ = \{W \in \mathbb{R}^n; \forall V_- \in K_-, \exists (\bar{V}, \mu) \in K_- \times \mathbb{R}^+, W - V_- = \mu(\bar{V} - V_-)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Define  $T_U^- \subset \mathbb{R}^n$ ,  $R_V^- \subset \mathbb{R}^n$  and  $\Pi_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  by means of (6)–(8):  $\Pi_U$  is the projection onto the set of admissible directions. Consider the weak formulation for constrained solutions in  $K_-$

$$-\int_x \int_t (E(U)\partial_t \varphi + F(U)\partial_x \varphi) dx dt + \int_x \int_t (\langle U, \bar{V} \rangle \partial_t \varphi + \langle f(U), \bar{V} \rangle \partial_x \varphi) dx dt \leq 0. \quad (2)$$

This weak formulation is true for the limit of smooth dissipative solutions (11). Discontinuous shock solutions of the weak formulation satisfy what we call Weak Rankine Hugoniot relation

$$-\sigma(E_R - E_L) + (F_R - F_L) - \langle -\sigma(U_R - U_L) + (f_R - f_L), \bar{V} \rangle \leq 0, \quad V_R, V_L \in K_-, \forall \bar{V} \in K_+,$$

where  $\sigma$  is the shock velocity.

Discussion of the Weak Rankine Hugoniot relation is possible. For instance considering the example (1) we deduce that possible shocks are classical shock. Therefore we construct a solution of the Riemann problem: it consists of two classical shocks followed by a rarefaction fan. See Fig. 1 for a comparison between the classical non constrained solution and the new constrained one.

An application to the study of elastoplastic shocks is proposed in [4].

## 1. Introduction

Soit un système de lois de conservation  $\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$  muni d'une entropie et de son flux d'entropie. L'inconnue principale est  $U \in \mathbb{R}^n$ , le flux est  $U \mapsto f(U) \in \mathbb{R}^n$ , l'entropie strictement convexe est notée  $U \mapsto E(U) \in \mathbb{R}$ , le flux d'entropie étant noté  $U \mapsto F(U) \in \mathbb{R}$ . Divers exemples physiques nous mènent à introduire une contrainte que nous supposons convexe par rapport à la variable primitive ou entropique  $V = \nabla_U E$ . Nous considérons la contrainte  $V \in K$  où  $K$  est un convexe fermé régulier de  $\mathbb{R}^n$ . La convexité de  $K$  permet de faire l'hypothèse que la transformation  $U \mapsto V(U)$  est inversible globalement et régulière. La transformation inverse est notée  $V \mapsto U(V)$ . Les résultats présentés dans cette Note sont issus de [4] et en constituent une généralisation.

## 2. Exemples

**Exemple 1** (*Système des ondes avec contrainte convexe*). Le système est  $\partial_t u + \partial_x v = 0$ ,  $\partial_t v + \partial_x u = 0$ . La contrainte est  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Il est naturel de prendre en compte la contrainte grâce à un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$

$$\partial_t u + \partial_x v = -\lambda u, \quad \partial_t v + \partial_x u = -\lambda v. \quad (3)$$

Des considération heuristiques élémentaires permettent la détermination de  $\lambda$  pour une solution régulière : si  $u^2 + v^2 < 1$  alors  $\lambda = 0$ ; si  $u^2 + v^2 = 1$  alors  $\lambda = -\partial_x(uv)$ . Une question que nous nous posons est de donner un sens au second membre non conservatif pour des solutions discontinues de (3), lesquelles sont naturelles pour les lois de conservations. L'entropie est l'énergie  $L^2$  :  $E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ ,  $F = uv$ ,  $V = U = (u, v)$ . Avec ces notations la contrainte convexe est  $V \in K = \{W \in \mathbb{R}^2; W_1^2 + W_2^2 \leq 1\}$ .

**Exemple 2** (*Système des eaux peu profondes avec perte de masse (cf. [2])*). Ce système non linéaire décrit la perte de masse causée par un débordement du lit naturel du flot

$$\partial_t h + \partial_x hu = Q, \quad \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) = Qu. \quad (4)$$

De ce fait la hauteur d'eau  $h \geq 0$  est contrainte  $h \leq 1$ . Le multiplicateur  $Q$  assure la contrainte. Pour une solution régulière : si  $h < 1$  alors  $Q = 0$ ; si  $h = 1$  alors  $Q = \partial_x hu = \partial_x u$ . En toute généralité et sans hypothèse supplémentaire le système (4) est non conservatif ce qui rend problématique l'étude des solutions discontinues de ce système. L'entropie est  $E = \frac{g}{2} h^2 + \frac{1}{2} hu^2$ ,  $F = Eu + \frac{g}{2} h^2 u$ , et  $V = (gh - \frac{1}{2} u^2, u) \neq U$ . La contrainte est  $V \in K = \{W \in \mathbb{R}^2; 0 \leq W_1 + \frac{1}{2} W_2^2 \leq g\}$ . Néanmoins  $K$  n'est pas convexe. Nous verrons à la section suivante comment convexifier cette contrainte.

**Exemple 3** (*Système modèle pour l'élastoplasticité*). Nous renvoyons le lecteur à [4]. Le système modèle sans cisaillement s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p - s_1) = 0, & p = p(\tau, \varepsilon), \quad \tau = \frac{1}{\rho}, \\ \partial_t \rho s_1 + \partial_x\left(\rho u s_1 - \frac{4}{3}\alpha u\right) = 0, & \partial_t \rho s_2 + \partial_x\left(\rho u s_2 + \frac{2}{3}\alpha u\right) = 0, & \partial_t \rho s_3 + \partial_x\left(\rho u s_3 + \frac{2}{3}\alpha u\right) = 0, \\ \partial_t \rho \sigma_{23} + \partial_x(\rho u \sigma_{23}) = 0, & \partial_t \rho e + \partial_x(\rho u e + p u - s_1 u) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

L'énergie totale est la somme de l'énergie interne, de l'énergie cinétique et de l'énergie élastique.  $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4\alpha}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2\sigma_{23}^2)$ . Les variables  $(s_1, s_2, s_3, \sigma_{23})$  décrivent la partie déviatorique du tenseur des contraintes. On considère une loi d'état de type stiffened-gas  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon - \gamma\Pi$ ,  $\gamma > 1$ ,  $\Pi > 0$ . L'entropie est  $E = -\rho S$ , la variable entropique est  $V = -(\frac{\mu}{T}, -\frac{u}{T}, -\frac{s_1}{2\alpha T}, -\frac{s_2}{2\alpha T}, -\frac{s_3}{2\alpha T}, -\frac{\sigma_{23}}{\alpha T}, \frac{1}{T})$ . La contrainte de plasticité s'écrit classiquement sous la forme  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2\sigma_{23}^2 \leq k^2$  où  $k$  est une constante.

### 3. Résultats principaux

Pour des raisons essentiellement techniques nous considérons la contrainte  $V \in K_- \subset K$  plus fine que  $V \in K$ . Souvent on peut prendre  $K_- = K$  mais il est parfois nécessaire de considérer  $K_- \neq K$ . Par exemple pour le système des eaux peu profondes, les solutions à hauteur d'eau strictement positive correspondent à  $K_- = \{W \in \mathbb{R}^2; 0 < W_1 + \frac{1}{2}W_2^2 \leq g\} \neq K$ . Soit  $K_+$  le domaine défini par

$$K_- \subset K \subset K_+ = \{W \in \mathbb{R}^n; \forall V_- \in K_-, \exists(\bar{V}, \mu) \in K_- \times \mathbb{R}^+, W - V_- = \mu(\bar{V} - V_-)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Nous faisons l'hypothèse que  $K_+$  est convexe et fermé. Si  $K_+ = K$  et que  $K$  est un convexe fermé, alors  $K_+$  est aussi convexe et fermé. Cela couvre presque tous les exemples. On s'assure dans les cas particuliers  $K_+$  est bien convexe et fermé : par exemple pour le système des eaux peu profondes on prendra  $K_+ = \{W \in \mathbb{R}^2; W_1 + \frac{1}{2}W_2^2 \leq g\}$  qui est un convexe fermé.

Pour une fonction  $U$  dans  $U(K_-)$ , l'ensemble des directions admissibles pour  $\partial_t U$  est

$$T_U^- = \left\{ W \in \mathbb{R}^n; W = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{U_\varepsilon - U}{\varepsilon} \text{ avec } U_\varepsilon = U(V_\varepsilon) \text{ et } V_\varepsilon \in K_- \right\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Son image dans l'espace adjoint est

$$R_V^- = \left\{ Z \in \mathbb{R}^n; Z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V_\varepsilon - V}{\varepsilon} \text{ avec } V_\varepsilon \in K_- \right\} = (\nabla_U V)T_U \subset \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Pour tout  $V \in K_-$  nous définissons l'opérateur de projection  $W_0 \mapsto \Pi_U(W_0)$  sur l'ensemble des directions admissibles pour la métrique de l'entropie  $\nabla_U V$

$$\begin{cases} \langle W_0 - \Pi_U(W_0), \nabla_U V(W - \Pi_U(W_0)) \rangle \leq 0, \\ \Pi_U(W_0) \in T_U^-, \quad \forall W \in T_U^-. \end{cases} \quad (8)$$

A l'aide de ces notations les divers exemples considérés s'écrivent sous la forme (9) qui ne fait plus apparaître explicitement le multiplicateur

$$\partial_t U - \Pi_U(-\partial_x f(U)) = 0, \quad U(x, t) \in U(K_-) \text{ pp.} \quad (9)$$

Le cas qui nous intéresse est

$$V(t, x) \in \partial K_-, \text{ pp.} \quad (10)$$

Le résultat suivant établit la stabilité des petites perturbations autour des constantes.

**Lemme 3.1** (cf. [4]). *Supposons que  $K_-$  est régulier. Supposons que la contrainte (10) est saturée. Alors le système (9) est symétrisable.*

Soit  $M = M^t \geq 0$  une matrice de dissipation constante. Cette hypothèse simplifie l'analyse. Mais nous pensons qu'il est possible de la relaxer. Par exemple le terme de viscosité  $M \partial_x V_v$  qui apparaît dans (11) devrait pouvoir se remplacer par  $\partial_x U_v = [\nabla_v U(V_v)] \partial_x V_v$ . La seule différence est alors que  $M_v = [\nabla_v U(V_v)] = M_v^t > 0$  dépend de  $(t, x)$ .

**Théorème 3.2** (cf. [4]). *Soit une suite  $U_v$  de solutions visqueuses restreintes dans  $K_-$*

$$\partial_t U_v - \Pi_U(-\partial_x f(U_v) + v \partial_x M \partial_x V_v) = 0, \quad U_v(x, t) \in U(K_-) \text{ pp.} \quad (11)$$

*Nous supposons que cette suite admet la limite  $(t, x) \mapsto U(t, x) \in K_- : U_v \rightarrow U$  presque partout avec l'estimation  $\|U_v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$  pour tout  $v > 0$ . Alors  $U$  est solution faible de :  $\forall \bar{V} \in K_+$  et  $\forall \varphi \in C_0^\infty$*

$$-\int_x \int_t (E(U) \partial_t \varphi + F(U) \partial_x \varphi) dx dt + \int_x \int_t (\langle U, \bar{V} \rangle \partial_t \varphi + \langle f(U), \bar{V} \rangle \partial_x \varphi) dx dt \leq 0. \quad (12)$$

**Lemme 3.3** (Réciproque (cf. [4])). *Soit  $(t, x) \mapsto U(t, x) \in K_-$  une solution faible régulière de (12). Supposons que la contrainte (10) est saturée. Alors  $U$  est une solution forte de (9).*

L'intérêt principal de la formulation faible (12) est qu'elle permet d'énoncer une condition nécessaire que doivent vérifier les solutions discontinues du type :  $U(t, x) = U_G$  pour  $x < \sigma t$  ;  $U(t, x) = U_D$  pour  $x > \sigma t$ . La vitesse de la discontinuité est  $\sigma$ . Nous décidons d'appeler cette condition nécessaire relation de Rankine Hugoniot faible. C'est une relation algébrique.

**Proposition 3.4.** *La relation de Rankine Hugoniot faible pour les solutions discontinues de (12) est*

$$-\sigma(E_R - E_L) + (F_R - F_L) - \langle -\sigma(U_R - U_L) + (f_R - f_L), \bar{V} \rangle \leq 0, \quad V_R, V_L \in K_-, \forall \bar{V} \in K_+.$$

Cette inégalité est la combinaison de l'inégalité d'entropie classique et du produit scalaire de la relation de Rankine Hugoniot classique contre toute fonction test de  $K_+$ . Cela justifie la dénomination de relation de Rankine Hugoniot faible. La formulation de Rankine Hugoniot faible est équivalente à l'inégalité

$$-\sigma(E_R - E_L) + (F_R - F_L) + \max_{-\bar{V} \in K_+} (\langle -\sigma(U_R - U_L) + (f_R - f_L), -\bar{V} \rangle) \leq 0. \quad (13)$$

#### 4. Discussion de la relation de Rankine Hugoniot faible pour les exemples

Nous revenons sur les exemples de la Section 2.

##### 4.1. Exemple 1

On choisit  $K_- = K_+ = K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 \leq 1\}$ . L'inégalité (13) devient

$$\begin{aligned} \sqrt{(-\sigma[u] + [v])^2 + (-\sigma[v] + [u])^2} &\leq \sigma \left[ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] - [uv] \\ &= (\sigma[u] - [v]) \times \frac{u_R + u_L}{2} + (\sigma[v] - [u]) \times \frac{v_R + v_L}{2}. \end{aligned}$$

Si  $(u_R, v_R) \neq (u_L, v_L)$  alors  $-\sigma[u] + [v] = -\sigma[v] + [u] = 0$ . Énoncé autrement, les solutions discontinues pour le système non conservatif (3) sont les solutions chocs classiques : ici la relation de Rankine Hugoniot faible est équivalente à la relation de Rankine Hugoniot forte ou classique [6]. *Il n'y a pas de choc non classique [3], pour le système (3).*

On construit aisément une solution du problème de Riemann en raccordant des chocs classiques et des solutions autosemblables régulières en  $\frac{x}{t}$ . Considérons la donnée initiale  $(u_L, v_L) = (0.4, \sqrt{1 - u_L^2})$  et  $(u_D, v_D) = (0.4, -\sqrt{1 - u_D^2})$ . La solution sans contrainte calculée à l'aide d'un schéma de type volumes finis et la solution avec contrainte calculée par le même schéma sont présentées Fig. 1. La solution contrainte se compose de deux chocs classiques et d'une détente dans la zone intermédiaire.

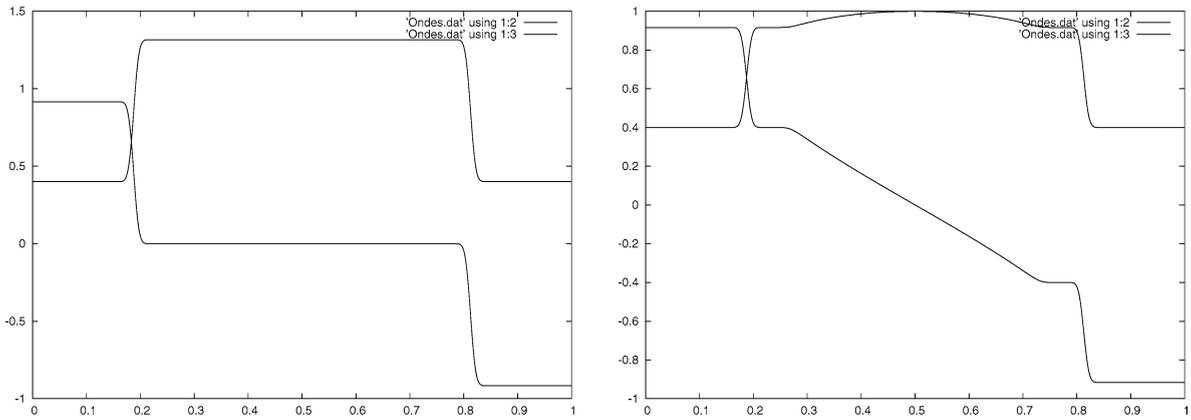


Fig. 1. Solution  $(u, v)$  du problème de Riemann : sans contrainte à gauche et avec contrainte à droite.

#### 4.2. Exemple 2

On prend  $K_- = \{W \in \mathbb{R}^2; 0 < W_1 + \frac{1}{2}W_2^2 \leq g\} \neq K \neq K_+ = \{W \in \mathbb{R}^2; W_1 + \frac{1}{2}W_2^2 \leq g\}$ . Considérons une solution discontinue qui relie deux états contraints i.e.  $h_L = h_R = 1$ . Par invariance Galiléenne du modèle la relation de Rankine Hugoniot faible dans le repère du choc est  $[\frac{1}{2}u^3 + gu^2] + \max_{V_1 + \frac{1}{2}V_2^2 \leq g} (-[u]V_1[u^2 + \frac{1}{2}gu]V_2) \leq 0$ . Le maximum étant atteint sur le bord de  $K$ , on déduit que  $[\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}gu^2] + \max_{V_2} (-[u](g - \frac{1}{2}V_2^2) - [u^2]V_2)$ . Cela implique tout d'abord que  $[u] = u_R - u_L \leq 0$ . Donc le maximum est atteint pour  $V_2 = \frac{[u^2]}{[u]} = u_L + u_R$ . Après simplification on obtient une deuxième inégalité  $u_L u_R \leq 0$ . Dans le référentiel du laboratoire, la condition d'entropie faible est équivalente

$$u_L \geq \sigma \geq u_R.$$

*Cela est compatible avec l'intuition physique.* Le niveau d'eau déborde le long d'une discontinuité d'écoulement qui avance à la vitesse  $\sigma$  ssi le flot droit et le flot gauche se rencontrent dans la discontinuité. Cela justifie une hypothèse de la formulation faible de [2], laquelle formulation faible est différente de celle proposée dans ce travail.

#### 4.3. Exemple 3

Ceci a constitué la motivation initiale de ce travail. Nous renvoyons le lecteur à [4]. L'analyse de la relation de Rankine Hugoniot faible conjuguée avec la prise en compte des petits paramètres naturels de la physique sous-jacente (pour les écoulements élastoplastiques en variables adimensionnées : les variations de densité sont faibles ; le seuil de plasticité  $k$  est faible par rapport à la vitesse du son) permet d'aboutir à la conclusion suivante.

*Dans la limite des petits paramètres naturels pour les écoulements élastoplastiques sans cisaillement, il existe une seule solution sous contrainte de la relation de Rankine Hugoniot faible. Il s'agit du choc parfaitement plastique [5].* Énoncé autrement, il n'est pas possible de choquer sans cisaillement un matériau sous contrainte et en compression dans le cas où la contrainte n'est pas alignée avec l'axe principal d'écoulement.

### 5. Conclusion

La relation de Rankine Hugoniot faible est une relation algébrique que doivent nécessairement vérifier les solutions discontinues pour les systèmes considérés, pourvu que ces solutions discontinues soient des limites de solutions visqueuses. Pour les exemples la discussion de cette relation algébrique permet d'obtenir des conclusions précises quant à la nature des solutions discontinues possibles. Ces conclusions semblent physiquement admissibles. Cela apporte un éclairage complémentaire à la problématique des chocs non classiques pour les formulations non conservatives telle qu'elle est développée dans [3] par exemple.

Bien d'autres systèmes sont susceptibles de se voir appliquer l'approche proposée dans cette Note.

Un premier exemple est le système d'Euler pour les gaz compressibles avec chimie réactive, lequel est particulièrement important pour les applications. En première approximation les réactions chimiques peuvent se décomposer en deux catégories, les réactions rapides et les réactions lentes. Un choc qui se propage dans un milieu avec des réactions chimiques rapides peut se modéliser comme une solution discontinue d'un système de lois de conservation avec contraintes.

Un deuxième exemple est la théorie des systèmes aux moments (voir par exemple le travail de Chen, Levermore, Liu [1]) qui peut aussi s'interpréter comme un cas particulier.

## Références

- [1] G.Q. Chen, C.D. Levermore, T.P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation and entropy, *Comm. Pure Appl. Math.* 47 (1994) 787–830.
- [2] F. Berthelin, F. Bouchut, Weak solutions for a hyperbolic system with unilateral constraint and mass loss, *Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire* 20 (2003) 975–997.
- [3] Dal Maso, Le Floch, F. Murat, Definition and weak stability of non conservative products, *J. Math. Pures Appl.* 74 (1995) 458–483.
- [4] B. Després, A geometrical approach to non conservative shocks and elastoplastic shocks, Hyke preprint server.
- [5] D.S. Drumheller, *Introduction to Wave Propagation in Nonlinear Fluids and Solids*, Cambridge Press University, 1998.
- [6] D. Serre, *Systems of Conservation*, I, Cambridge University Press, 1999 and II, 2000. Diderot, France.