

Analyse numérique

Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés

Christophe Le Potier

Commissariat à l'énergie atomique, DEN/DM2S/SFME/MTMS, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

Reçu le 1^{er} juin 2005 ; accepté après révision le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 10 novembre 2005

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Nous décrivons une nouvelle méthode de volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages déformés. L'idée du schéma est de calculer les gradients à l'aide d'une expression non linéaire. Pour les problèmes instationnaires, si le pas de temps est assez petit, la matrice globale associée à ce schéma est monotone sans condition géométrique sur le maillage et sans condition sur le rapport d'anisotropie. Nous vérifions numériquement la précision de la méthode par comparaison à une solution analytique. Nous montrons l'efficacité de l'algorithme par comparaison à d'autres schémas numériques qui ne respectent pas le principe du maximum discret sur le cas étudié. *Pour citer cet article : C. Le Potier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).* © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Finite volume monotone scheme for highly anisotropic diffusion operators on unstructured triangular meshes. We introduce a new finite volume method for highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes. The main idea is to calculate the gradient using a nonlinear scheme. For parabolic problems, if the time step is small enough, the resulting global matrix is monotone without geometrical constraints on the mesh and restrictive conditions on the anisotropy ratio. We check the precision of the method in comparison with analytical solutions. The efficiency of the algorithm is demonstrated by comparing it with numerical schemes which do not satisfy a discrete maximum principle on the studied case. *To cite this article : C. Le Potier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In the framework of nuclear waste disposal simulation, we are interested in a transport model in porous media which can be described by a convection–diffusion equation. Recently, a cell-centered finite volume scheme has been proposed to discretize the diffusion operator [6,7]. We have shown the robustness and the precision of the algorithm in comparison with analytical solutions. However, this scheme does not ensure a discrete maximum principle for distorted meshes or for highly anisotropic diffusion. We propose a new algorithm which is monotone for any anisotropic tensors on unstructured meshes.

Adresse e-mail : clepotier@cea.fr (C. Le Potier).

We consider the problem (1) and first present the method in the isotropic homogenous case. We define \mathcal{B} as the set of the nodes which are the intersection of the bisectors of each triangular cell and the nodes located on the middles of the edges of the boundary. For any node O_i , it can be shown that there exists a triangular cell $(X_{T_{i,1}}, X_{T_{i,2}}, X_{T_{i,3}})$ belonging to \mathcal{B} so that the node O_i is inside this triangular cell. Using second order in space formula, integrating the first equation of the system (1) and using Green's formula we deduce the gradient (2). Combining two ways of calculating this gradient (3), we obtain the nonlinear expression (4). Then integrating in space the second equation of the system (1), we obtain the scheme (6). The main result is the Proposition 2.1: using an explicit scheme, if the time step is small enough, then the resulting global matrix is monotone without geometrical constraints on the mesh.

Then, we take into account an anisotropic heterogeneous matrix $\overline{\overline{D}}$. We introduce a new definition of the nodes of the set \mathcal{B} , depending on the matrix $\overline{\overline{D}}$ (Proposition 2.2). We obtain another nonlinear expression of the gradient. Proposition 2.1 is also satisfied.

In a third part, we present numerical results. We first verify the precision of the algorithm in comparison with an analytical solution (Eq. (8) and Eq. (9)) where the anisotropic ratio of the matrix $\overline{\overline{D}}$ is equal to 10^3 . We observe that the scheme is of the second order in space (Table 1). We show the efficiency of the method on a case where mixed hybrid finite elements [1,2,4], finite elements [3,2], and finite volumes [6,7] do not satisfy a discrete maximum principle.

To conclude, we emphasize that this scheme is particularly interesting in the case where the transport model is coupled with nonlinear chemical models. Indeed, in this case, it is, of course, very important to calculate positive radioactive element concentrations and it is necessary to deal with nonlinear partial differential equations.

1. Introduction

Dans le cadre des études concernant le stockage des déchets nucléaires en formation géologique profonde, nous nous intéressons à un modèle de type transport qui s'écrit à l'aide d'une équation de convection–diffusion–dispersion avec un terme de décroissance radioactive et qui permet d'étudier la migration d'un radionucléide. Un schéma volumes finis, centré sur les mailles, a été récemment développé pour approcher le terme diffusif. Nous avons montré la robustesse et la précision de l'algorithme [6,7]. Cependant, cette méthode ne respecte pas le principe du maximum pour des maillages très déformés ou des tenseurs fortement anisotropes. Notons qu'à notre connaissance, il n'existe pas de schéma satisfaisant ce principe sans condition géométrique et sans condition restrictive sur le rapport d'anisotropie. Nous présentons un nouvel algorithme de volumes finis discrétisant un opérateur de diffusion hétérogène anisotrope monotone pour tout maillage de triangles non structurés.

2. Formulation volumes finis en 2 dimensions

Nous considérons un domaine polygonal convexe Ω de frontière Γ . Nous simplifions le modèle de transport en supprimant la convection et la décroissance radioactive. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \overline{\overline{D}} \nabla C, \\ \omega \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{q} \quad \text{sur } \Omega \quad \forall t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec : ω , la porosité, C , la concentration de radionucléide, $\overline{\overline{D}}$, une matrice (2,2) symétrique définie positive. Nous imposons, d'autre part, une condition initiale et des conditions aux limites du type Dirichlet sur la frontière du domaine étudié.

2.1. Cas isotrope homogène

Nous considérons un maillage \mathcal{T} de N_{ma} triangles, N_f arêtes frontière. Nous notons $\mathcal{B} = \{X_{j|1 \leq j \leq N_{ma} + N_f}\}$, l'ensemble constitué des intersections des bissectrices de chaque triangle et des milieux des arêtes frontière. Le domaine Ω étant convexe, on montre que pour chaque noeud O_i à l'intérieur de Ω , il existe un triplet de points $(X_{T_{i,1}}, X_{T_{i,2}}, X_{T_{i,3}})$ appartenant à \mathcal{B} tel que O_i soit à l'intérieur du triangle associé à ce triplet. En pratique, on choisit les points les plus proches de O_i . Il existe donc trois coefficients positifs ou nuls $\lambda_{i,j}, j=1,2,3$ avec $\sum_{\{1 \leq j \leq 3\}} \lambda_{i,j} = 1$, tels que $\sum_{\{1 \leq j \leq 3\}} \lambda_{i,j} \mathbf{O}_i X_{T_{i,j}} = \mathbf{0}$. Nous reprenons les notations décrites dans [5]. Pour $T \in \mathcal{T}$, nous notons (Fig. 1) :

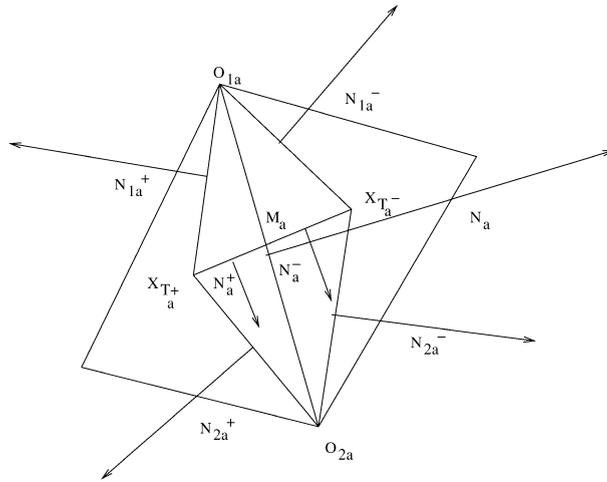


Fig. 1. Maillages de triangles.

Fig. 1. Mesh of triangular cells.

- $S(T)$, la surface du triangle T , X_T l'intersection de ses bissectrices, $c_j(T)$, $j = 1, 2, 3$ les côtés de T .
- $\mathbf{n}_{T,j}$ le vecteur orthogonal à $c_j(T)$ orienté vers l'extérieur et de même norme que le côté $c_j(T)$, pour $j = 1, 2, 3$.

Soit \mathcal{A}_{ext} l'ensemble des arêtes appartenant à $\partial\Omega$, \mathcal{A}_{int} , l'ensemble des arêtes intérieures. Pour $a \in \mathcal{A}_{\text{int}}$, nous notons :

- T_a^+, T_a^- deux triangles dont a est une arête en commun, $O_{1,a}, O_{2,a}$ les deux noeuds de l'arête a .
- \mathbf{n}_a , le vecteur orthogonal au segment $O_{1,a}O_{2,a}$ telle que \mathbf{n}_a soit extérieure à T_a^+ et de même norme que $O_{1,a}O_{2,a}$.
- $\mathbf{n}_{1,a}^+, \mathbf{n}_{2,a}^+, \mathbf{n}_{1,a}^-$ et $\mathbf{n}_{2,a}^-$ les vecteurs orthogonaux aux arêtes $X_{T_a^+}O_{1,a}, X_{T_a^+}O_{2,a}, X_{T_a^-}O_{1,a}$ et $X_{T_a^-}O_{2,a}$, respectivement de même norme que ces dernières.
- $PT_{i,a}$ le triangle $(O_{i,a}, X_{T_a^+}, X_{T_a^-})$ de surface $SF_{i,a}$ et de frontière $\partial PT_{i,a}$.

Pour $a \in \mathcal{A}_{\text{ext}}$, nous notons également :

- PT_a le triangle $(O_{1,a}, X_{T_a^+}, O_{2,a})$ de surface SF_a et de frontière ∂PT_a .

Nous notons $SF_{i,a}\mathbf{q}_{i,a}$ la valeur de $\int_{PT_{i,a}} \mathbf{q} \, d\Omega$ si $a \in \mathcal{A}_{\text{int}}$ et $SF_a\mathbf{q}_a$ la valeur de $\int_{PT_a} \mathbf{q} \, d\Omega$ sur PT_a si $a \in \mathcal{A}_{\text{ext}}$, C_T , la valeur de la concentration C au point X_T . D'autre part, nous approchons la valeur de la concentration C au point $O_{i,a}$ à l'aide de l'expression $C_{O_{i,a}} = \sum_{\{1 \leq j \leq 3\}} \lambda_{i,j} C_{T_{i,j}}$. Pour une arête a appartenant à \mathcal{A}_{int} , intégrons la première équation du système 1 sur $PT_{i,a}$ en utilisant la formule de Green. Nous pouvons écrire :

$$\int_{PT_{i,a}} \mathbf{q} \, d\Omega = \int_{PT_{i,a}} \nabla C \, d\Omega = \int_{\partial PT_{i,a}} C \mathbf{n} \, d\Gamma. \tag{2}$$

En utilisant une approximation d'ordre 2 en espace, nous obtenons pour $i = 1, 2$:

$$\mathbf{q}_{i,a} = \frac{1}{2SF_{i,a}} C_{O_{i,a}} (\mathbf{n}_{i,a}^+ + \mathbf{n}_{i,a}^-) + \frac{1}{2SF_{i,a}} (-C_{T_a^-} \mathbf{n}_{i,a}^+ - C_{T_a^+} \mathbf{n}_{i,a}^-). \tag{3}$$

Si $C_{O_{1,a}} = 0$ (resp. $C_{O_{2,a}} = 0$), nous choisissons $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = \mathbf{q}_{1,a} \cdot \mathbf{n}_a$ (resp. $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = \mathbf{q}_{2,a} \cdot \mathbf{n}_a$). Dans le cas contraire, nous posons :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = \frac{(C_{O_{2,a}}/SF_{2,a})\mathbf{q}_{1,a} \cdot \mathbf{n}_a + (C_{O_{1,a}}/SF_{1,a})\mathbf{q}_{2,a} \cdot \mathbf{n}_a}{(C_{O_{2,a}}/SF_{2,a}) + (C_{O_{1,a}}/SF_{1,a})}. \tag{4}$$

Dans tous les cas, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a$ s'écrit : $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = \mu_{1,a} \mathbf{q}_{1,a} \cdot \mathbf{n}_a + \mu_{2,a} \mathbf{q}_{2,a} \cdot \mathbf{n}_a$ avec $\mu_{1,a} + \mu_{2,a} = 1$. Si l'arête a appartient à \mathcal{A}_{ext} , nous intégrons la première équation du système 1 sur le triangle PT_a et nous imposons les valeurs des conditions aux limites, aux points $O_{1,a}$ et $O_{2,a}$. Nous obtenons :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = \mathbf{q}_a \cdot \mathbf{n}_a = \left\{ \frac{1}{2SF_a} C_{T_a^+} (\mathbf{n}_{1,a}^+ + \mathbf{n}_{2,a}^+) + \frac{1}{2SF_a} (-C_{O_{1,a}} \mathbf{n}_{2,a}^+ - C_{O_{2,a}} \mathbf{n}_{1,a}^+) \right\} \cdot \mathbf{n}_a. \quad (5)$$

En intégrant la seconde équation du système 1 sur un triangle T , nous obtenons le schéma :

$$\int_T \omega \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = S(T) \omega \frac{\partial C_T}{\partial t} = \int_T \text{div } \mathbf{q} d\Omega = \int_{\partial T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sum_{j=1}^{j=3} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{T,j}. \quad (6)$$

2.2. Propriétés de l'algorithme

Nous notons SF la matrice diagonale dont les coefficients sont les surfaces du maillage, Δt le pas de temps, $C^n = C(n\Delta t)$ le vecteur concentration de dimension N_{ma} et $A(C^n)$ la matrice de la discrétisation de $\text{div } \overline{\overline{D}} \nabla$ de dimension N_{ma} . Nous choisissons un schéma temporel explicite. La discrétisation de l'équation (6) devient :

$SF\omega C^{n+1} = (SF\omega + \Delta t A(C^n))C^n$ et nous posons $M = SF\omega + \Delta t A(C^n)$. Nous supposons que $\forall T, C_T^n \geq 0$ et nous notons également les expressions suivantes :

- $exp_a = aux_a = -\frac{1}{2SF_a} (\mathbf{n}_{1,a}^+ + \mathbf{n}_{2,a}^+) \cdot \mathbf{n}_a$ si l'arête $a \in \mathcal{A}_{\text{ext}}$;
- $exp_a = \frac{\mu_{1,a} \mathbf{n}_{1,a}^- \cdot \mathbf{n}_a}{2SF_{1,a}} + \frac{\mu_{2,a} \mathbf{n}_{2,a}^- \cdot \mathbf{n}_a}{2SF_{2,a}} \leq aux_a = \max(\frac{\mathbf{n}_{1,a}^- \cdot \mathbf{n}_a}{2SF_{1,a}}, \frac{\mathbf{n}_{2,a}^- \cdot \mathbf{n}_a}{2SF_{2,a}})$ si l'arête $a \in \mathcal{A}_{\text{int}}$.

Proposition 2.1. Si $\Delta t \leq \min_{T \in \mathcal{T}} \frac{S(T)\omega}{\sum_{j=1}^{j=3} aux_{T,j}}$, le schéma précédent (VFMON) est monotone.

Si l'arête $a \in \mathcal{A}_{\text{int}}$, l'égalité (4) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a &= \left\{ -\mu_{1,a} \frac{\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_{1,a}^+}{2SF_{1,a}} - \mu_{2,a} \frac{\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_{2,a}^+}{2SF_{2,a}} \right\} C_{T_a^-} - \left\{ \mu_{1,a} \frac{\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_{1,a}^-}{2SF_{1,a}} + \mu_{2,a} \frac{\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_{2,a}^-}{2SF_{2,a}} \right\} C_{T_a^+} \\ &= f(C_{O_{1,a}}, C_{O_{2,a}}) C_{T_a^-} - exp_a C_{T_a^+}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'ensemble \mathcal{B} , on déduit que f et exp_a sont deux fonctions positives. Si l'arête $a \in \mathcal{A}_{\text{ext}}$, l'égalité (5) devient : $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = coef_{1,a} C_{O_{1,a}} + coef_{2,a} C_{O_{2,a}} - exp_a C_{T_a^+}$ où $coef_{1,a}$, $coef_{2,a}$ sont deux coefficients positifs. L'expression exp_a est également positive. Le schéma s'écrit donc : $S(T)\omega C_T^{n+1} = S(T)\omega C_T^n - \Delta t \sum_{j=1}^{j=3} exp_{T,j} C_T^n + \Delta t \sum_{T_j \in V(T)} \alpha_{T_j} C_{T_j}^n$ où $V(T)$ désigne des mailles dans le voisinage de T et les coefficients α_{T_j} sont des réels positifs ou nuls. Si Δt vérifie l'inégalité décrite ci-dessus, l'expression $S(T)\omega - \Delta t \sum_{j=1}^{j=3} exp_{T,j}$ est positive. Les coefficients de la matrice M sont donc tous positifs. On en déduit que le schéma VFMON est monotone.

Remarque 1. Les flux sont calculés de manière consistante car ils sont approchés à l'aide de développements d'ordre 2 en espace ainsi que l'expression permettant de calculer $C_{O_{i,a}}$.

Remarque 2. En pratique, nous résolvons le système matriciel suivant : $(SF\omega - \Delta t A(C^{n+1}))C^{n+1} = SF\omega C^n$, avec un algorithme de point fixe ou de Newton qui permet de relaxer la condition sur le pas de temps.

Remarque 3. Pour un maillage de triangles équilatéraux, la condition CFL devient $\Delta t \leq Ch^2$ où h est la longueur d'une arête.

2.3. Prise en compte d'une matrice $\overline{\overline{D}}$ hétérogène et anisotrope

Nous notons $\overline{\overline{D}}_T$ la valeur de $\int_T \overline{\overline{D}} d\Omega / \int_T d\Omega$, $\tilde{\mathbf{n}}_{T,j} = \overline{\overline{D}}_T \mathbf{n}_{T,j}$, $j = 1, 2, 3$, l'image des vecteurs $\mathbf{n}_{T,j}$ par l'application linéaire associée à la matrice $\overline{\overline{D}}_T$.

Proposition 2.2. *Il existe un point à l'intérieur de chaque triangle $T \in \mathcal{T}$ tel que la projection dans la direction de $\tilde{\mathbf{n}}_{T,j}$ sur son côté associé soit à l'intérieur de celui-ci.*

Pour chaque triangle, nous décomposons $\overline{\overline{D}}_T$ sous la forme $\overline{\overline{D}}_T = RD_T^2$, RD_T étant une matrice (2,2) symétrique définie positive. On note A_{RD_T} l'application affine associée à l'application linéaire représentée matriciellement par RD_T et de point fixe un sommet du triangle T . Le point recherché X'_T est l'image réciproque de l'intersection des bissectrices du triangle $A_{RD_T}T$.

L'ensemble \mathcal{B} est maintenant constitué de l'ensemble des points X'_T et des milieux des arêtes frontière. Nous introduisons les notations supplémentaires suivantes :

- le point M_a est l'intersection des segments $O_{1,a}O_{2,a}$ et $X'_{T_a^+}X'_{T_a^-}$, les vecteurs \mathbf{n}_a^+ et \mathbf{n}_a^- sont les vecteurs orthogonaux aux segments $X'_{T_a^+}M_a$ et $M_aX'_{T_a^-}$, respectivement de même norme que ces derniers, $SF_{i,a}^+$ (resp. $SF_{i,a}^-$) la surface du triangle $O_{i,a}X'_{T_a^+}M_a$ (resp. $O_{i,a}X'_{T_a^-}M_a$).
- $C_{M_{i,a}}$ la valeur de la concentration au point M_a associée à $O_{i,a}$, $SF_{i,a}^+q_{i,a}^+$ (resp. $SF_{i,a}^-q_{i,a}^-$) la valeur du vecteur $\int_{O_{i,a}X'_{T_a^+}M_a} \mathbf{q} \, d\Omega$ (resp. $\int_{O_{i,a}X'_{T_a^-}M_a} \mathbf{q} \, d\Omega$).

En utilisant des approximations d'ordre 2 en espace, l'égalité (3) devient pour $i = 1, 2$ et pour $* = +, -$:

$$\overline{\overline{D}}_{T_a^*}^{-1} \mathbf{q}_{i,a}^* = \frac{1}{2SF_{i,a}^*} (C_{T_a^*} - C_{M_{i,a}}) \mathbf{n}_{i,a}^* + \frac{1}{2SF_{i,a}^*} (C_{T_a^*} - C_{O_{i,a}}) \mathbf{n}_a^* \tag{7}$$

Nous éliminons les inconnues supplémentaires $C_{M_{i,a}}$ en imposant la continuité des composantes normales, c'est à dire $\mathbf{q}_{i,a}^+ \cdot \mathbf{n}_a = \mathbf{q}_{i,a}^- \cdot \mathbf{n}_a$. Pour $a \in \mathcal{A}_{\text{int}}$, après quelques calculs algébriques, nous reconstruisons $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_a = f(C_{O_{1,a}}, C_{O_{2,a}})C_{T_a^-} - g(C_{O_{1,a}}, C_{O_{2,a}})C_{T_a^+}$ où f et g sont deux fonctions calculées à l'aide d'une combinaison linéaire similaire à celle utilisée dans l'égalité (4). En utilisant la nouvelle définition de l'ensemble \mathcal{B} de la Proposition 2.2, on montre que $\mathbf{n}_a \cdot \overline{\overline{D}}_{T_a^+} \mathbf{n}_{i,a}^+ \leq 0$ et que $\mathbf{n}_a \cdot \overline{\overline{D}}_{T_a^-} \mathbf{n}_{i,a}^- \geq 0$. On déduit que les fonctions f et g sont positives. Par suite, si Δt est suffisamment petit, la Proposition 2.1 est également vérifiée.

3. Résultats numériques

Nous cherchons à retrouver numériquement la solution analytique du problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\overline{\overline{D}}\nabla C) = S & \text{sur } \Omega =]0, 0, 5[\times]0, 0, 5[\\ C = \sin(\pi x) \sin(\pi y) & \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec } \overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} y^2 + \epsilon x^2 & -(1 - \epsilon)xy \\ -(1 - \epsilon)xy & x^2 + \epsilon y^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

et

$$\begin{cases} S = -\sin(\pi x) \sin(\pi y)((1 + \epsilon)\pi^2(x^2 + y^2)) - \cos(\pi x) \sin(\pi y)((1 - 3\epsilon)\pi x) \\ \quad - \sin(\pi x) \cos(\pi y)((1 - 3\epsilon)\pi y) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)(2\pi^2(1 - \epsilon)xy). \end{cases} \tag{9}$$

Le paramètre ϵ est égal à 10^{-3} ce qui donne un rapport d'anisotropie égal à 10^3 . La solution analytique de ce problème s'écrit : $C = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Pour traiter la non linéarité, nous effectuons quelques itérations d'un algorithme de point fixe pour se rapprocher de la solution, puis nous accélérons la convergence à l'aide d'un algorithme de Newton. Nous atteignons la convergence en une dizaine d'itérations pour le maillage le plus fin constitué d'environ 38 000 triangles. Nous représentons dans le Tableau 1 les erreurs L^2 de C par rapport à la solution analytique en fonction de h pour des maillages de triangles non structurés. Nous constatons que l'ordre de la méthode est proche de 2. Comme S est négatif, le schéma respecte le principe du maximum seulement si la solution calculée est positive. Nous vérifions que cette propriété est bien satisfaite.

Afin de montrer l'efficacité de la méthode, nous considérons le même domaine de calcul, une source vérifiant $S = 1$ sur le carré $]0, 125, 0, 375[\times]0, 125, 0, 375[$, et $C = 0$ sur frontière de Ω . Les autres données du problème ne sont pas changées. Nous reprenons le maillage le plus fin. Nous représentons dans le Tableau 1 le pourcentage de concentrations négatives avec les éléments finis mixtes hybrides (EFMH) [1,2,4], avec les volumes finis VFNEW

Tableau 1
 Erreur L^2 en fonction du pas en espace et pourcentage des concentrations négatives pour le maillage fin

h	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
Erreur L^2	$4,21 \times 10^{-2}$	$1,02 \times 10^{-2}$	$2,67 \times 10^{-3}$	$7,20 \times 10^{-4}$	$1,59 \times 10^{-4}$	$4,01 \times 10^{-5}$
Schéma	EFMH	VFNEW	EFG	VFMON		
Conc. négatives	17	7	12	0		

décrits dans [6,7] et avec les éléments finis de type Galerkin standard (EFG) [2,3]. D'autre part, avec le schéma VFMON, nous vérifions que toutes les valeurs obtenues sont positives.

Pour conclure, notons que ce schéma est particulièrement intéressant dans le cas où le modèle de transport est couplé à un modèle de chimie non linéaire, où il est primordial de calculer des concentrations positives de radionucléides, et où il est nécessaire de traiter des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Références

- [1] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] G. Bernard-Michel, C. Le Potier, A. Beccantini, S. Gounand, M. Chraïbi, The Andra Couplex1 test: Comparisons between Finite Element, Mixed Hybrid Finite Element and Finite Volume Element Discretizations: Simulation of Transport around a Nuclear Waste Disposal Site, *Comput. Geosci.* 8 (2) (2004) 187–201.
- [3] P.G. Ciarlet, P.A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2 (1973) 17–31.
- [4] F. Dabbène, Mixed hybrid finite elements for transport of pollutants by undergrounds water, in: *Proceeding of the 10th International Conference on Finite Elements in Fluids*, Tucson, USA, 1998.
- [5] R. Herbin, An error estimate for a finite volume for a diffusion–convection problem on a triangular mesh, *Numer. Methods Partial Differential Equations* (1995) 165–173.
- [6] C. Le Potier, A finite volume method for the approximation of highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes, in: *Finite Volumes for Complex Applications IV*, Marrakech, Marocco, 2005.
- [7] C. Le Potier, Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés, *C. R. Acad. Sci., Ser. I 340* (2005) 921–926.