Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 751–754
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle/Algèbre

K-théorie pour les singularités coniques isolées

André Legrand, David Poutriquet

Laboratoire de mathématiques Emile-Picard, université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 24 mai 2005 ; accepté après révision le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 14 novembre 2005

Présenté par Alain Connes

Résumé

Pour une variété singulière compacte à singularités coniques isolées, on construit des groupes de K-théorie paramétrés par un entier positif strictement inférieur à la dimension de la variété. Rationnellement c'est le groupe de K-théorie de la variété pour l'entier nul et pour la valeur maximum du paramètre c'est celui de la variété à bord obtenue par excision des points singuliers. On construit aussi un caractère de Chern à valeurs dans la cohomologie d'intersection pour une perversité convenable. C'est un isomorphisme dans le cadre rationnel. Une version « à la Chern–Weil » des constructions précédentes est obtenue en utilisant la K-théorie multiplicative de Karoubi. ***Pour citer cet article : A. Legrand, D. Poutriquet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

K*-theory for conical isolated singularities.** For a compact singular variety with isolated conical singularities we define K-theory groups which depend upon a non-negative integer less than the dimension. In the rational setting, the null case gives the K-theory of the singular variety, the biggest case gives the K-theory of the manifold with boundary obtained when excising the singular points. We define also a Chern character which takes its values in the intersection cohomology associated to a suitable perversity. This character is an isomorphism in the rational setting. We give a Chern–Weil version of the above constructions using the multiplicative K-theory of Karoubi. ***To cite this article: A. Legrand, D. Poutriquet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

L'homologie d'intersection a été introduite par Goresky et MacPherson [7] pour prolonger la dualité de Poincaré dans un cadre singulier. Pour une variété lisse la dualité est définie par l'intersection de cycles. Dans le cas singulier Goresky et MacPherson ont montré qu'on peut encore définir l'intersection de cycles satisfaisant à certaines conditions de transversalité avec la partie singulière. L'homologie d'intersection est l'homologie de ces cycles appelés cycles admissibles ou permis. Pour une variété à singularités coniques isolées l'homologie d'intersection est paramétrée par un entier positif q strictement inférieur à la dimension. Elle s'identifie avec l'homologie habituelle pour les degrés strictement supérieurs à $q+1$ et avec l'homologie de la variété à bord obtenue en excisant les points singuliers pour

Adresses e-mail : legrand@picard.ups-tlse.fr (A. Legrand), poutriquet@picard.ups-tlse.fr (D. Poutriquet).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.10.015

les degrés inférieurs ou égaux à q. Lorsque leur dimension est au plus q, les cycles du link des points singuliers persistent. L'homologie d'intersection d'un cône n'est pas nulle.

Des théorèmes de type de Rham singulier existent, la condition de transversalité des cycles admissibles devenant un contrôle asymptotique pour les « formes admissibles », [3,4].

Un théorème de Connes singulier, c'est-à-dire que les cycles d'intersection sont représentables par des classes cycliques, existe aussi dans certains cas [6,4,5].

Nous définissons ici, pour des variété à singularités coniques isolées, une nouvelle K-théorie. Celle-ci correspond à la cohomologie d'intersection. Plus précisément un caractère de Chern à valeur dans la cohomologie d'intersection rationnelle est construit dans la Section 3 et on montre (cf. Théorème 3.3) que ce caractère est rationnellement un isomorphisme. En utilisant les groupes de K-théorie multiplicative de Karoubi [8] on donne une construction à la Chern–Weil de ce caractère dans la Section 4. La représentation de ce caractère de Chern dans le cadre de l'homologie cyclique fera l'objet d'une autre publication.

Les informations homologiques d'un fibré différentiable sont portées par les puissances de la courbure d'une connexion or tout fibré sur la variété est trivial au voisinage d'une singularité conique. Pour construire ces nouveaux groupes de K-théorie, on remplace les fibrés par des « triplets admissibles » qui gardent de la courbure au-dessus des singularités. On les organise en un groupe de K-théorie dans la Section 2.

2. Groupe de K-théorie associé à une variété à singularités coniques isolées

Une variété à singularités coniques isolées [10] est un espace X avec des points isolés $a_i \in X$ tel que $X - \bigcup_i \{a_i\}$ soit une variété C^∞ ouverte (partie régulière). De plus pour chaque a_i on a un homéomorphisme d'un voisinage V_i de a_i sur le cône sur une variété compacte lisse L_i, $([0, \varepsilon_i) \times L_i)/(\{0\} \times L_i)$ qui induit un difféomorphisme de $V_i \setminus \{a_i\}$ sur le cône épointé $(0, \varepsilon_i) \times L_i$.

On note $\widetilde{X}$ la variété à bords déduite de X en remplaçant les bouts coniques de X par des bouts cylindriques $\widetilde{c_{\varepsilon_i} L_i} = [0, \varepsilon_i) \times L_i$ (stretched manifold, [10]). La projection naturelle $\widetilde{X} \to X$ est un difféomorphisme entre les parties régulières, le bord $\bigcup_i L_i$ de $\widetilde{X}$ est envoyé sur la partie singulière $\bigcup_i \{a_i\}$ de X.

Dans la suite on suppose X compacte et connexe par arcs et pour simplifier nous considérerons une seule singularité conique $a \in X$ de link $L = \partial \widetilde{X}$. Cela ne diminuera pas la généralité des résultats.

Définition 2.1. Fixons un entier positif q strictement inférieur à la dimension de X. Un triplet admissible est un triplet (E, F, t) où

- $E \to \widetilde{X}$ est un $\mathbb{C}$-fibré vectoriel rationnellement q-plat au bord, c'est-à-dire $\mathrm{ch}_j\, E_{|L} = 0$ pour $2j \geqslant q + 1$,
- $F \to \widetilde{X}$ est un sous-fibré $F \subset E$ tel que $\mathrm{ch}_j\, F = \mathrm{ch}_j\, E$ pour $2j \geqslant q + 2$ et $\mathrm{ch}_j\, F = 0$ pour $0 < 2j \leqslant q + 1$,
- $F_{|L}$ est trivial et $t : F_{|L} \to \mathbb{C}^{\mathrm{rg}\, F} \times L$ est une trivialisation.

Deux triplets admissibles (E, F, t) et (E', F', t') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de paires de fibrés $\alpha : (E, F) \to (E', F')$ prolongeant $t'^{-1} t : F_{|L} \to F'_{|L}$.

On note $F/t \to X$ le fibré obtenu en identifiant par t en une seule fibre toutes les fibres de F au-dessus de L, c'est-à-dire que les fibres F_x et F_y au-dessus de $x, y \in L$ sont identifiées par $t_y^{-1} t_x : F_x \to F_y$. Si les triplets admissibles (E, F, t) et (E', F', t') sont isomorphes, les fibrés F/t et F'/t' sont isomorphes.

On note (n) le fibré trivial de rang n. Deux triplets admissibles (E, F, t) et (E', F', t') sont équivalents s'il existe des fibrés triviaux $(n), (p), (p')$ avec $p \leqslant n$ et $p' \leqslant n$ tels que les triplets $(E \oplus (n), F \oplus (p), t \oplus \mathrm{id})$ et $(E' \oplus (n), F' \oplus (p'), t' \oplus \mathrm{id})$ soient isomorphes.

La somme de Whitney passe au quotient et munit l'ensemble des classes d'équivalence de triplets admissibles d'une structure de semi-groupe. On note $I_q K(X)$ le groupe symétrisé et $[E, F, t]$ la classe du triplet admissible (E, F, t) dans $I_q K(X)$. L'écriture classique des éléments de K-théorie [1] s'étend aux triplets admissibles.

Lemme 2.2. (1) *Pour tout triplet admissible (E, F, t) il existe un triplet admissible (E', F', t') tel que $(E \oplus E', F \oplus F', t \oplus t')$ soit équivalent au triplet admissible trivial $((n), (m), \mathrm{id})$ $(n \geqslant m)$.*

(2) *Tout élément de $I_q K(X)$ est de la forme $[E, F, t] - [(n'), (m'), \mathrm{id}]$ $(n' \geqslant m')$.*

En associant à un triplet admissible (E, F, t) le fibré E sous-jacent, on définit un morphisme de $I_q K(X) \to K(\widetilde{X})$. Tout fibré $E \to \widetilde{X}$ rationnellement q-plat au bord, n'est pas sous-jacent à un triplet admissible. Par contre on a :

Lemme 2.3. *Étant donné un fibré $E \to \widetilde{X}$ rationnellement q-plat au bord, il existe des fibrés F_1 et F_2 sur $\widetilde{X}$ et des entiers p, n tels que* :

(i) $\mathrm{ch}\, F_1 \in \bigoplus_{2j \leqslant q+1} H^{2j}(\widetilde{X}, \mathbb{Q})$ *et* $\mathrm{ch}(F_2 - \mathrm{rg}\, F_2) \in \bigoplus_{2j \geqslant q+2} H^{2j}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}))$,
(ii) $(F_2)_{|L}$ *est trivial et si q est impair,* $\mathrm{ch}_{(q+1)/2}((F_1)_{|L}) = 0$ *dans* $H^{q+1}(L, \mathbb{Q})$,
(iii) $pE \oplus n = F_1 \oplus F_2$.

En particulier, pour toute trivialisation t de $(F_2)_{|L}$, le triplet $(pE \oplus n, F_2, t)$ est admissible.

3. Caractère de Chern à valeurs dans la cohomologie d'intersection

Rappelons tout d'abord, [2] :

Proposition 3.1. *Soit une perversité $\bar{p}$ et $\bar{q}$ la perversité complémentaire. On note $0 \leqslant q = q_N \leqslant N - 2$. La cohomologie d'intersection rationnelle de X de dimension N vérifie*

$$I H^j_{\bar{p}}(X; \mathbb{Q}) = \begin{cases} H^j(\widetilde{X}; \mathbb{Q}) & si\ j \leqslant q, \\ \mathrm{im}\big(H^{q+1}(X; \mathbb{Q}) \to H^{q+1}(\widetilde{X}; \mathbb{Q})\big) & si\ j = q+1, \\ H^j(X; \mathbb{Q}) & si\ j > q+1. \end{cases}$$

Définition 3.2. On définit le caractère de Chern $\mathrm{ch}' : I_q K(X) \to I H^{\mathrm{pair}}_{\bar{p}}(X; \mathbb{Q})$ en posant

– $\mathrm{ch}'_j[E, F, t] = \mathrm{ch}_j[E] \in H^{2j}(\widetilde{X}; \mathbb{Q})$ pour $2j \leqslant q+1$;
– $\mathrm{ch}'_j[E, F, t] = \mathrm{ch}_j[F/t] \in H^{2j}(X; \mathbb{Q})$ pour $2j \geqslant q+2$.

Théorème 3.3. *Le caractère de Chern* ch' *est bien à valeurs dans* $I H^{\mathrm{pair}}_{\bar{p}}(X; \mathbb{Q})$ *et définit un isomorphisme*

$$\mathrm{ch}' : I_q K(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} I H^{\mathrm{pair}}_{\bar{p}}(X; \mathbb{Q}).$$

4. Constructions de Chern–Weil pour une variété à singularités coniques isolées

Par définition un objet différentiable sur la variété à bord $\widetilde{X}$ signifie la restriction à $\widetilde{X}$ d'un objet différentiable sur la variété ouverte $\widetilde{X}_\varepsilon$ avec des bouts cylindriques $(-\varepsilon, \varepsilon) \times L$ prolongeant $\widetilde{X}$. En particulier, on note $\Omega^* \widetilde{X}$ l'algèbre des formes différentielles sur $\widetilde{X}$ et on définit $\Omega^*(X)$ par la suite exacte

$$0 \to \Omega^*(X) \to \Omega^*(\widetilde{X}) \to \Omega^*(L) \to 0.$$

De même une connection sur un fibré différentiable sur $\widetilde{X}$ est la restriction au-dessus de $\widetilde{X}$ d'une connection sur un fibré défini sur $\widetilde{X}_\varepsilon$ et la forme de Chern de cette connexion est dans $\Omega^{\mathrm{pair}}(\widetilde{X})$. Soit toujours un entier $0 \leqslant q \leqslant N - 2$. Notons $\Omega^*(X) \subset \mathcal{F}^*_q(\widetilde{X}) \subset \Omega^*(\widetilde{X})$ le complexe défini par

$$\mathcal{F}^j_q(X) = \Omega^j(\widetilde{X}), \quad j \leqslant q\ ; \quad \mathcal{F}^{q+1}_q(X) = \Omega^{q+1}(X) + d\Omega^q(\widetilde{X})\ ; \quad \mathcal{F}^j_q(X) = \Omega^j(X), \quad j \geqslant q+2.$$

Nous allons considérer la K-théorie multiplicative de Karoubi associée à la famille constante de sous-complexes $\mathcal{F}^r = \mathcal{F}^*_q(\widetilde{X})$, [9]. Rappelons qu'un fibré vectoriel multiplicatif sur $\widetilde{X}$ est un triplet (E, D, w), où E est un fibré vectoriel sur $\widetilde{X}$, D une connexion sur E et $w \in \Omega^{\mathrm{imp.}}(\widetilde{X})$ tel que $\mathrm{ch} D = dw$ modulo $\mathcal{F}^*_q(\widetilde{X})$. Deux fibrés multiplicatifs (E, D, ω) et (E', D', ω') sont équivalents si il existe un isomorphisme α entre E et E' et si on a la relation $w - w' = \int_0^1 (\mathrm{ch}((1-t)D + t\alpha^* D')\, \mathrm{d}t$ modulo $\mathcal{F}^*_q(\widetilde{X}) + d\Omega^*(\widetilde{X})$. On note $[E, D, \omega]$ la classe du fibré multiplicatif (E, D, ω). Muni de la somme $[E, D, \omega] + [E', D', \omega'] = [E + E', D + D', \omega + \omega']$, l'ensemble des classes de fibrés multiplicatifs est un semi-groupe. On désigne par $MK(\widetilde{X}, q)$ le symétrisé. Le caractère de Chern multiplicatif $\overline{\mathrm{ch}} : MK(\widetilde{X}, q) \to$

$H^*(\mathcal{F}_q^*(\widetilde{X}))$ est défini par $\overline{\mathrm{ch}}[E, D, \omega] = [\mathrm{ch}\, D - d\omega]$ où le deuxième membre est la classe de cohomologie du cocyle $\mathrm{ch}(D) - d\omega$ de $\mathcal{F}_q^*(\widetilde{X})$. La proposition suivante justifie notre intérêt pour cette théorie.

Proposition 4.1. *Le complexe $\mathcal{F}_q^*(\widetilde{X})$ est un complexe d'intersection (sa cohomologie est la cohomologie d'intersection) pour la variété à singularité conique X et pour la perversité $\bar{p}$.*

Pour étendre aux triplets admissibles la construction de M. Karoubi de la classe caractéristique d'un fibré plat [8] il nous faut caractériser cette K-théorie multiplicative à partir d'espaces classifiants. On note $\mathcal{H}_q$ la fibre homotopique de l'application $\mathrm{ch}_{>q} : BU \to \prod_{2j \geqslant q+1} K(\mathbb{C}, 2j)$ induite par $\mathrm{ch} : BU \to \prod_{2j \geqslant 0} K(\mathbb{C}, 2j)$. Nous avons le théorème de classification

Théorème 4.2. *Pour q pair, $MK(\widetilde{X}, q)$ et $\pi_0(\mathrm{Hom}((\widetilde{X}, L), (BU, \mathcal{H}_q)))$ sont naturellement isomorphes.*

Pour associer à un triplet admissible (E, F, t) une classe caractéristique dans la théorie multiplicative, on considère une application $\xi : \widetilde{X} \to BU$ classifiant E et une application $\eta : (\widetilde{X}, L) \to (BU, *)$ relevant une application $X \to BU$ classifiant F/t. Supposons q pair, la définition de triplet admissible implique l'existence d'une homotopie entre $\mathrm{ch}_{>q} \circ \xi$ et $\mathrm{ch}_{>q} \circ \eta$ dont le relevé à partir de ξ fournit une application $\xi_1 : (\widetilde{X}, L) \to (BU, \mathcal{H}_q)$ dont la classe d'homotopie $[\xi_1]$ est déterminée modulo l'image de $H^{\mathrm{impair}}(\widetilde{X}, \mathbb{C})$. Le Théorème C.2 de [9] montre immédiatement que $\overline{\mathrm{ch}}([\xi_1])$ est canoniquement défini.

Théorème 4.3. *Soit (E, F, t) un triplet admissible et q l'entier correspondant. Posons $q_1 = q$ si q est pair et $q_1 = q + 1$ sinon. La construction précédente détermine une classe caractéristique $W(E, F, t) \in MK(\widetilde{X}, q_1)/H^{\mathrm{impair}}(\widetilde{X}, \mathbb{C})$ de ce triplet admissible. Le caractère de Chern multiplicatif de cette classe, $\overline{\mathrm{ch}}(W(E, F, t))$, est bien défini et détermine le caractère de Chern d'intersection tensorisé par $\mathbb{C}$ par la relation $I(\mathrm{ch}'[E, F, t] \otimes 1_{\mathbb{C}}) = \overline{\mathrm{ch}}(W(E, F, t))$ où $I : H^{\mathrm{pair}}(\mathcal{F}_q^*(\widetilde{X})) \to H^{\mathrm{pair}}(\mathcal{F}_{q_1}^*(\widetilde{X}))$ est l'injection canonique.*

Références

[1] M. Atiyah, K-Theory, Benjamin, New York, 1967.
[2] A. Borel, et al., Intersection Cohomology, Progr. in Math., vol. 50, Birkhäuser, Boston, 1984.
[3] J.P. Brasselet, de Rham theorems for singular varieties, Contemp. Math. 161 (1994) 95–112.
[4] J.P. Brasselet, A. Legrand, Differential forms on singular varieties and cyclic homology, in: Singularity Theory, Liverpool 1996, in: London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 263, Cambridge Univ. Press, 1999, pp. 175–187.
[5] J.P. Brasselet, A. Legrand, N. Teleman, Hochshild homology of singular algebras, K-Theory 29 (2003) 1–25.
[6] A. Connes, Non commutative differential geometry, Publ. Math. IHES 62 (1985) 257–360.
[7] M. Goresky, R. MacPherson, Intersection homology theory, Topology 19 (1980) 135–162.
[8] M. Karoubi, Homologie cyclique et K-théorie, Astérisquee 149 (1987).
[9] M. Karoubi, Théories générales des classes caractéristiques secondaires, K-Theory 4 (1990) 55–87.
[10] B.W. Schultze, Boundary Value Problems and Singular Pseudo-differential Operators, Pure Appl. Math., J. Wiley & Sons, 1998.