

Probabilités

Discrétisation d'équations différentielles stochastiques unidimensionnelles à générateur sous forme divergence avec coefficient discontinu

Miguel Martinez, Denis Talay

INRIA, 2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis, France

Reçu le 6 septembre 2005 ; accepté après révision le 18 octobre 2005

Disponible sur Internet le 28 novembre 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

Dans cette Note nous discrétisons des équations différentielles stochastiques associées à des équations aux dérivées partielles paraboliques unidimensionnelles avec opérateur sous forme divergence dont le coefficient est discontinu en 0. Nous établissons la vitesse de convergence au sens faible. *Pour citer cet article : M. Martinez, D. Talay, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Discretization of one-dimensional stochastic differential equations whose generators are divergence form with a discontinuous coefficient. In this Note, we discretize stochastic differential equations related to one-dimensional parabolic partial differential equations with a divergence form operator whose coefficient is discontinuous at 0. We establish the convergence rate in a weak sense. *To cite this article: M. Martinez, D. Talay, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We consider a divergence form operator A on \mathbb{R} formally defined as

$$A = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d}{dx} \right],$$

a function f in $L^2(\mathbb{R})$, and the parabolic problem

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - Au(t, x) = 0 & \text{for all } (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x) & \text{for all } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

We suppose:

Adresses e-mail : miguel.math@gmail.com (M. Martinez), Denis.Talay@sophia.inria.fr (D. Talay).

Assumption 0.1.

- There exists $\lambda > 0$ and $\Lambda > 0$ such that

$$0 < \lambda \leq \sigma^2(x) \leq \Lambda < +\infty \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$
- The function σ is discontinuous at point 0 and is class $C_b^6((0, \infty) \cup (-\infty, 0))$.
- The first six derivatives of function σ have finite left and right limits at 0.

Our objective is to construct and to analyze a Monte-Carlo method to approximate $u(t, x)$ at a few number of points. Compared to the classical deterministic algorithms, this method avoids the computation of the solution in the whole integration domain. Our motivation comes, e.g., from an algorithm of identification of the magnetic permittivity around the brain [4].

Lejay and Martínez [3] and Étoré [1] have recently proposed Monte-Carlo algorithms for this problem: these methods are based on the construction and the simulation of a certain class of random walks in a discrete state space and are quite complex. This justifies to develop a much simpler approach based on the simulation of processes living in the whole Euclidean space. To this end, we need to get a probabilistic interpretation of $u(t, x)$ which can easily be simulated. It seems difficult to use the Lyons–Zheng type decompositions (see, e.g., Rozkosz and Słomiński [8]). We thus use the forward representation that can be deduced from the Dirichlet Form associated to A (see, for example, Fukushima et al. [2]). Our results concern one-dimensional problems only. In higher dimensions we have not yet succeeded to construct a probabilistic interpretation which can efficiently be simulated. However, the construction and analysis of numerical probabilistic procedures for divergence form parabolic equations with discontinuous coefficients is a new subject which has many applications. We hope that our preliminary results will be extended in a next future.

Consider the stochastic differential equation with local time

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t \sigma(X_s) \sigma'(X_s) \mathbb{1}_{X_s \neq 0} ds + \frac{\sigma^2(0+) - \sigma^2(0-)}{2\sigma^2(0+)} L_t^0(X). \quad (2)$$

Here $L_t^0(X)$ is the local time corresponding to the function sign, denoted by sgn and defined by $\text{sgn}(x) = 1$ for $x > 0$ and $\text{sgn}(x) = -1$ for $x \leq 0$ (see Meyer [6]).

We know that

$$u(t, x_0) := \mathbb{E}_{x_0}[f(X_t)] \quad (3)$$

is the unique solution of (1) in an appropriate function space (see [4,3]).

Set

$$\beta := \frac{\sigma^2(0+) - \sigma^2(0-)}{2\sigma^2(0+)}$$

and let the function h be defined as

$$h(z) := z - \frac{\beta}{1-\beta} |z| \quad \text{for all } z \in \mathbb{R}.$$

Notice that h is one-to-one. Define

$$\tilde{\sigma}(x) := \sigma \circ h^{-1}(x) - \frac{\beta}{1-\beta} \sigma \circ h^{-1}(x) \text{sgn}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{b}(x) := \sigma \circ h^{-1}(x) \sigma' \circ h^{-1}(x) - \frac{\beta}{1-\beta} \sigma \circ h^{-1}(x) \sigma' \circ h^{-1}(x) \text{sgn}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Then $Y := h(X)$ satisfies a certain SDE with discontinuous coefficients. Moreover, let (\bar{Y}_t) be the approximation of (Y_t) defined by $\bar{Y}_0 = h(X_0)$ and, for all $t_k^n := \frac{kT}{n} \leq t \leq t_{k+1}^n := \frac{(k+1)T}{n}$ with $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t_k^n} + \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{t_k^n})(B_t - B_{t_k^n}) + \tilde{b}(\bar{Y}_{t_k^n})(t - t_k^n). \quad (4)$$

We then define our approximation of (X_t) by

$$\bar{X}_t = h^{-1}(\bar{Y}_t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

The following sets of functions are used to describe the flatness at 0 of the initial condition f :

$$\mathcal{H}^0 := \{g \in C^3(\mathbb{R}), g \in C^4(\mathbb{R}) \text{ a.e.}, g^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ and } g^{(i)}(0) = 0 \text{ for } i = 1, \dots, 4\},$$

and

$$\mathcal{H} := \{g \in C^3(\mathbb{R}), g \in C^4(\mathbb{R}) \text{ a.e.}, g^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ for } i = 1, \dots, 4\}.$$

Theorem 0.2. *Suppose that Assumption 0.1 holds true. Let $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ in \mathcal{H}^0 . For all $\rho > 0$ and all x_0 , there exists a real number $C(T, \rho, x_0)$ such that, for all integer $n \geq 1$,*

$$|\mathbb{E}_{x_0} f(X_T) - \mathbb{E}_{x_0} f(\bar{X}_T)| \leq C(T, \rho, x_0) \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2-\rho}.$$

Theorem 0.3. *Suppose that Assumption 0.1 holds true. Let $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ in \mathcal{H} . For all x_0 there exists a real number $C(T, x_0)$ such that, for all integer $n \geq 1$,*

$$|\mathbb{E}_{x_0} f(X_T) - \mathbb{E}_{x_0} f(\bar{X}_T)| \leq C(T, x_0) \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}.$$

The (rather technical) proofs of these theorems can be found in [4] and [5]. Let us explain the main idea here. Since $u(0, x_0) = f(x_0)$ the discretization error at time T can be expressed as

$$\begin{aligned} \epsilon_T^{x_0} &= |\mathbb{E}_{h(x_0)} f \circ h^{-1}(\bar{Y}_T) - \mathbb{E}_{h(x_0)} f \circ h^{-1}(Y_T)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{E}_{h(x_0)} u(T - t_k^n, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k^n})) - \mathbb{E}_{h(x_0)} u(T - t_{k+1}^n, h^{-1}(\bar{Y}_{t_{k+1}^n}))) \right|. \end{aligned}$$

We use a Taylor expansion for each term appearing in the summation. When $\bar{Y}_{t_k^n}$ and $\bar{Y}_{t_{k+1}^n}$ are simultaneously positive or negative, we use accurate estimates of the derivatives of $u(t, x)$ for t in $(0, T]$ and x in $\mathbb{R} - \{0\}$ (this step uses Aronson’s estimates for parabolic problems under divergence form). For the other cases, we begin to show that $u(t, x)$ is also a solution of a transmission problem and we introduce $u(T - t_{k+1}^n, 0)$ in the decomposition before performing the Taylor expansions; the lower order terms cancel owing to the transmission conditions. Let us point out that the transmission conditions and the remaining terms appear because we avoid the discretization of the local time in (2). The price to pay for this is hidden in the bijection h whose derivatives are discontinuous at 0.

For the proof of Theorem 0.3, we approximate $f \in \mathcal{H}$ with a sequence of functions in \mathcal{H}^0 .

1. Introduction

On considère un opérateur sous forme divergence A défini formellement par

$$A = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d}{dx} \right],$$

une fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$, et le problème parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - Au(t, x) = 0 & \text{pour tout } (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6}$$

On suppose :

Hypothèse 1.1.

– Il existe $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ tels que

$$0 < \lambda \leq \sigma^2(x) \leq \Lambda < +\infty \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

– σ est discontinue au point 0.

- σ est de classe $C_b^6([0, \infty[)$ et de classe $C_b^6(]-\infty, 0])$.
- Les six premières dérivées de σ possèdent des limites à droite et à gauche finies en 0.

Notre objectif est de construire et analyser une méthode de Monte-Carlo d'approximation de $u(t, x)$ en un petit nombre de points (t, x) fixés. Comparée aux algorithmes déterministes, cette méthode a l'avantage d'éviter de résoudre le problème dans tout le domaine d'intégration. Un exemple de motivation est fourni par l'identification de permittivités magnétiques à l'intérieur de la boîte crânienne (voir [4]).

Des méthodes de Monte-Carlo ont été récemment proposées par Lejay et Martinez [3] et par Étoré [1]. Elles reposent sur la simulation de marches aléatoires à valeurs dans un espace d'états discret et présentent une relative complexité algorithmique. Ceci justifie de développer une autre approche fondée sur la simulation de processus à valeurs dans un espace continu et de complexité algorithmique moindre. Il nous faut tout d'abord chercher une interprétation probabiliste de $u(t, x)$ qui se prête facilement à la simulation. Ceci rend difficile d'exploiter les représentations de type Lyons–Zheng dues, par exemple, à Rozkosz et Słomiński [8]. Nous avons donc préféré utiliser une représentation qui peut être déduite de la forme de Dirichlet associée à A (voir, par exemple, Fukushima et al. [2]).

Soit l'équation différentielle stochastique avec temps local

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t \sigma(X_s) \sigma'(X_s) \mathbb{1}_{X_s \neq 0} ds + \frac{\sigma^2(0+) - \sigma^2(0-)}{2\sigma^2(0+)} L_t^0(X). \quad (7)$$

Ici on convient que $L_t^0(X)$ est le temps local associé à la fonction signe, notée sgn , définie par $\text{sgn}(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\text{sgn}(x) = -1$ pour $x \leq 0$ (voir Meyer [6]).

On sait que

$$u(t, x_0) := \mathbb{E}_{x_0}[f(X_t)] \quad (8)$$

est l'unique solution de (6) dans un espace fonctionnel approprié (voir [4,3]). Telle quelle, cette représentation ne se prête pas aisément à la simulation à cause du terme de temps local dans la dynamique du processus (X_t) à discrétiser. Nous effectuerons donc une transformation de Zvonkin (comme Ouknine [7]) qui évacuera cette difficulté. L'analyse de la vitesse de convergence de la méthode ainsi construite impose de gérer le comportement singulier des dérivées de la fonction $u(t, \cdot)$ au voisinage de l'origine.

Nous soulignons que ce travail concerne les problèmes unidimensionnels seulement : en dimension plus grande, nous ne disposons pas encore d'interprétation probabiliste conduisant à des simulations de complexité réaliste. Néanmoins, la résolution numérique probabiliste de problèmes sous forme divergence et à coefficients discontinus est un sujet neuf, et nous espérons pouvoir étendre certaines des idées ci-dessous à des situations plus générales.

2. Une transformation de Zvonkin

On pose

$$\beta := \frac{\sigma^2(0+) - \sigma^2(0-)}{2\sigma^2(0+)}.$$

Soit h la fonction définie par

$$h(z) := z - \frac{\beta}{1-\beta} |z| \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}.$$

Comme $-1 < \frac{\beta}{1-\beta} < 1$, la fonction h est bijective. Par conséquent, nous pouvons définir des fonctions $\tilde{\sigma}$ et \tilde{b} par

$$\tilde{\sigma}(x) := \sigma \circ h^{-1}(x) - \frac{\beta}{1-\beta} \sigma \circ h^{-1}(x) \text{sgn}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{b}(x) := \sigma \circ h^{-1}(x) \sigma' \circ h^{-1}(x) - \frac{\beta}{1-\beta} \sigma \circ h^{-1}(x) \sigma' \circ h^{-1}(x) \text{sgn}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Le processus $Y := h(X)$ vérifie

$$Y_t = h(X_0) + \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s) dB_s + \int_0^t \tilde{b}(Y_s) \mathbb{1}_{h^{-1}(Y_s) \neq 0} ds. \tag{9}$$

Notons que cette équation différentielle stochastique, comme (7), a ses coefficients discontinus en 0, mais est sans terme de temps local.

2.1. Un schéma d'Euler

On définit une approximation (\bar{Y}_t) de (Y_t) en posant $\bar{Y}_0 = h(X_0)$ et, pour tout $t_k^n := \frac{kT}{n} \leq t \leq \frac{(k+1)T}{n} := \frac{(k+1)T}{n}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t_k^n} + \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{t_k^n})(B_t - B_{t_k^n}) + \tilde{b}(\bar{Y}_{t_k^n})(t - t_k^n). \tag{10}$$

Nous appelons schéma d'Euler pour l'équation (7) le processus (\bar{X}_t) défini par

$$\bar{X}_t = h^{-1}(\bar{Y}_t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{11}$$

Remarque 1. Le schéma d'Euler (\bar{X}_t) converge en loi vers (X_t) car (\bar{Y}_t) converge en loi vers (Y_t) (voir [10]). Cela étant, les coefficients \tilde{b} et $\tilde{\sigma}$ sont discontinus ; par conséquent, les hypothèses classiques des résultats de vitesse de convergence (voir, par exemple, [9]) ne sont pas vérifiées, et la vitesse de convergence attendue est plus faible que lorsque les coefficients de l'équation différentielle stochastique discrétisée sont réguliers.

3. Vitesse de convergence du schéma d'Euler

Introduisons les ensembles

$$\mathcal{H}^0 := \left\{ g \in C^3(\mathbb{R}), g \in C^4(\mathbb{R}) \text{ p.p.}, g^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ et } g^{(i)}(0) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \right\},$$

et

$$\mathcal{H} := \left\{ g \in C^3(\mathbb{R}), g \in C^4(\mathbb{R}) \text{ p.p.}, g^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \right\}.$$

Pour des raisons techniques, nous sommes amenés à distinguer deux cas :

- le cas particulier d'une condition initiale f appartenant à \mathcal{H}^0 : dans ce cas nous parvenons à obtenir de bonnes estimations pour les dérivées de $u(t, x)$ au voisinage de l'origine ;
- le cas plus général d'une condition initiale f appartenant à \mathcal{H} .

Théorème 3.1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de \mathcal{H}^0 . Sous les Hypothèses 1.1, pour tout $\rho > 0$ et tout x_0 il existe une constante $C(T, \rho, x_0)$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|\mathbb{E}_{x_0} f(X_T) - \mathbb{E}_{x_0} f(\bar{X}_T)| \leq C(T, \rho, x_0) \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2-\rho}.$$

Théorème 3.2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de \mathcal{H} . Sous les Hypothèses 1.1, il existe une constante $C(T, x_0)$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|\mathbb{E}_{x_0} f(X_T) - \mathbb{E}_{x_0} f(\bar{X}_T)| \leq C(T, x_0) \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}.$$

On peut trouver les preuves complètes (et techniques) des deux théorèmes ci-dessus dans [4] et [5]. Nous en donnons ici quelques éléments. Comme $u(0, x_0) = f(x_0)$, l'erreur de discrétisation à l'instant T peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} \epsilon_T^{x_0} &= \left| \mathbb{E}_{h(x_0)} f \circ h^{-1}(\bar{Y}_T) - \mathbb{E}_{h(x_0)} f \circ h^{-1}(Y_T) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{E}_{h(x_0)} u(T - t_k^n, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k^n})) - \mathbb{E}_{h(x_0)} u(T - t_{k+1}^n, h^{-1}(\bar{Y}_{t_{k+1}^n})) \right) \right|. \end{aligned}$$

Nous effectuons alors un développement de Taylor pour chaque terme de la somme.

Pour traiter les événements où $\bar{Y}_{t_k^n}$ et $\bar{Y}_{t_{k+1}^n}$ sont simultanément positifs ou négatifs, nous établissons des estimations fines sur les dérivées de $u(t, x)$ pour t dans $]0, T[$ et x dans $\mathbb{R} - \{0\}$ (cette étape utilise les inégalités d'Aronson pour les solutions de problèmes paraboliques avec opérateur sous forme divergence et strictement uniformément elliptique). Pour traiter les autres cas, nous commençons par vérifier que $u(t, x)$ est aussi solution d'un problème parabolique de transmission, puis nous intercalons le terme $u(T - t_{k+1}^n, 0)$ dans la décomposition avant d'effectuer les développements de Taylor; enfin nous utilisons les conditions de transmission pour supprimer des termes de reste d'ordre insuffisant. Remarquons que ces conditions de transmission et ces termes de reste traduisent le fait que nous avons réussi à éviter la discrétisation du terme de temps local de (7), mais au prix de l'utilisation de la fonction $h(x)$ dont les dérivées sont discontinues en 0.

Pour démontrer le Théorème 3.2, nous approchons $f \in \mathcal{H}$ par des fonctions de \mathcal{H}^0 .

Références

- [1] P. Etoré, On random walk simulation of one-dimensional diffusion processes with discontinuous coefficients (2005), submitted for publication.
- [2] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, de Gruyter Stud. Math., vol. 19, Walter de Gruyter, 1994.
- [3] A. Lejay, M. Martinez, A scheme for simulating one-dimensional diffusions with discontinuous coefficients, Annals Appl. Prob. (2005), in press.
- [4] M. Martinez, Interprétations probabilistes d'opérateurs sous forme divergence et analyse de méthodes numériques probabilistes associées, Ph.D. Thesis, université de Provence, 2004.
- [5] M. Martinez, D. Talay, Convergence rate of a Euler discretization scheme for one-dimensional stochastic differential equations whose generators are divergence form with a discontinuous coefficient, in preparation.
- [6] P.A. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastiques, in: Sém. Prob. X, in: Lecture Notes in Math., vol. 511, Springer, 1976, pp. 245–400.
- [7] Y. Ouknine, Le 'skew-Brownian motion' et les processus qui en dérivent (The 'skew Brownian motion' and associated processes), Teor. Veroyatnost. i Primenen. 35 (1) (1990) 173–179.
- [8] A. Rozkosz, L. Słomiński, Stochastic representation of reflecting diffusions corresponding to divergence form operators, Stud. Math. 139 (2) (2000) 141–174.
- [9] D. Talay, Probabilistic numerical methods for partial differential equations: Elements of analysis, in: D. Talay, L. Tubaro (Eds.), Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations and Numerical Applications, in: Lecture Notes in Math., vol. 1627, Springer, 1996, pp. 48–196.
- [10] L. Yan, The Euler scheme with irregular coefficients, Ann. Probab. 30 (3) (2002) 1172–1194.