Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 237–241

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique/Probabilités

Processus stationnaires sur l'arbre dyadique : prédiction et extension de covariance

Daniel Alpay [a], Dan Volok [b]

[a] *Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, P.O. Box 653, 84105 Beer-Sheva, Israel*
[b] *Department of Mathematics, Weizmann Institute of Sciences, 76100, Rehovot, Israel*

Reçu et accepté le 7 décembre 2005

Disponible sur Internet le 6 janvier 2006

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous définissons dans le cas dyadique la notion d'extension de covariance par étape positive, qui est l'analogue de l'extension centrale dans le cas classique. ***Pour citer cet article : D. Alpay, D. Volok, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Stationary processes on the dyadic tree: prediction and covariance extension. We define for multiscale dyadic stationary processes the notion of one step positive extension of the covariance matrix, which is the counterpart of the central extension in the single scale case. ***To cite this article: D. Alpay, D. Volok, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

This is the third Note in a series where we study linear systems indexed by the nodes of an infinite homogeneous tree $\mathcal{T}$ of order q. In [2] and [1] we studied respectively the stationary and non-stationary case, and defined a corresponding function theory in each of these cases. In the present Note we consider the case of stationary and isotropic stochastic processes indexed by $\mathcal{T}$ when $q = 2$ (the dyadic tree). Let us recall first the main features of the case $q = 1$ (that is, the case of the integers, $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$). Let $x(n)$ be a second order wide-sense stationary process, with covariance function $E(x(n)x(m)^*) = r(n-m)$. The prediction problem consists in minimizing $E\{|x(n+1) + \sum_{j=0}^{n} a_j x(j)|^2\}$. The coefficients a_j satisfy the Yule–Walker equations

$$\Phi_{n+1}(a_0\ a_1\ \ldots\ a_n\ 1)^t = (0\ 0\ \ldots\ 0\ \star)^t \quad \text{(the superscript } {}^t \text{ denotes transpose)},$$

where $\Phi_{n+1} = (r(j-i))_{i,j=0,\ldots,n+1}$ and $\star = r(0) - (\overline{r(n+1)} \cdots \overline{r(1)})\Phi_n^{-1}(r(n+1) \cdots r(1))^t$ is the Schur complement of Φ_n in Φ_{n+1}. Related to this problem is the positive extension problem: given the Toeplitz matrix Φ_n and assuming $\Phi_n > 0$, find all $r(n+1)$ such that $\Phi_{n+1} > 0$. As is well known (see, e.g., [10,8,9]), there is a special choice

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), danvolok@hotmail.com (D. Volok).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.12.018

of $r(n+1)$ such that Φ_{n+1}^{-1} is banded (that is, its $0, n+1$ entry is equal to 0), and this choice corresponds to the maximum entropy solution; it is called the central extension. In the Yule–Walker equations this corresponds to the supplementary constraint $a_0 = 0$. In applications the covariance function $r(n)$ is real (hence, $r(n) = r(-n)$). In this Note we study the analogs of the band extension when the integers are replaced by the nodes of the dyadic tree and in particular we consider the special isotropic case which was studied in [5] and [4] (in the latter, isotropic processes are called stationary).

1. Arbres et processus stationnaires

Nous renvoyons à [7,5,3] pour le cadre général dans lequel nous travaillons. Un point à l'infini est par définition une classe d'équivalence de chemins semi-infinis modulo un nombre fini de branches. Nous choisisons un tel point, noté $\infty_{\mathcal{T}}$. Soient t et s deux sommets de l'arbre. Le sommet $t \wedge s$ est par définition le premier sommet commun aux représentants de $\infty_{\mathcal{T}}$ qui contiennent t et s. L'ordre $\preceq$ sur l'arbre est alors défini par $t \preceq s$ si $d(t, t\wedge s) \leqslant d(s, t\wedge s)$ où d désigne la distance entre deux sommets. Nous dirons que $t \asymp s$ si $d(t, t\wedge s) = d(s, t\wedge s)$. L'opérateur de déplacement γ sur l'arbre vers l'infini est $t\gamma \preceq t$ si $d(t\gamma, t) = 1$. Il induit un opérateur linéaire isométrique sur $\ell_2(\mathcal{T})$ par $(\gamma f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(t\gamma)$. Un processus du second ordre x_t indexé par $\mathcal{T}$ est stationnaire si sa fonction de corrélation est de la forme $E(x_t\overline{x_s}) = r(d(t, t\wedge s), d(s, t\wedge s))$. Il est isotrope si

$$E(x_t\overline{x_s}) = r\big(d(t,s)\big) = r\big(d(t, t\wedge s) + d(s, t\wedge s)\big).$$

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous ensembles de sommets de $\mathcal{T}$. Motivés par la notion de processus stationnaire, nous dirons qu'un opérateur borné $S : \ell_2(\mathcal{U}) \mapsto \ell_2(\mathcal{V})$ est stationnaire s'il existe une fonction r tel que

$$\langle Se_u, e_v\rangle_{\ell_2(\mathcal{V})} = r\big(d(u, u\wedge v), d(v, u\wedge v)\big) \quad \big(e_t \text{ est la base canonique de } \ell_2(\mathcal{T})\big).$$

L'opérateur sera isotrope si $\langle Se_u, e_v\rangle_{\ell_2(\mathcal{V})} = r(d(u,v))$. Ces classes d'opérateurs ont été introduites dans le cas $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{T}$ dans [6].

2. Prédiction

Dans le cas $q = 1$ un intervalle fini de $\mathbb{Z}$ est un ensemble maximal de diamètre donné. Nous définissons de la même manière les intervalles dans le cas $q = 2$. Chaque intervalle est alors de la forme

$$T_n = \big\{t \in \mathcal{T}\colon\ t \preceq t_0 \text{ et } d(t, t_0) \leqslant n\big\} \tag{1}$$

pour un certain choix de $t_0 \in \mathcal{T}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour définir le problème de prédiction nous fixons un élément $t_0 \in \mathcal{T}$ et une suite croissante d'intervalles (qui dépendent de t_0)

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots, \qquad \operatorname{diam} T_n = n,$$

et introduisons $N_n = T_n \setminus T_{n-1}$ (lorsque $q = 1$ et $t_0 = 0$ nous avons $N_n = \{n\}$). De plus, pour $Q \subset \mathcal{T}$ nous définissons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des $e_u, u \in Q$ par $\widehat{Q}$. Notons que

$$\dim \widehat{N_n} = 2^{[n/2]}.$$

Le problème de la prédiction consiste à trouver un opérateur $A_n : \widehat{N_n} \mapsto \widehat{T_{n-1}}$ tel que pour chaque $b \in \widehat{N_n}$

$$E\left\{\overline{x_v}\left(\sum_{t\in N_n} \langle b, e_t\rangle x_t + \sum_{u\in T_{n-1}} \langle A_n b, e_u\rangle x_u\right)\right\} = 0, \quad \forall v \in T_{n-1}.$$

Théorème 2.1. *Supposons que $\Phi_n > 0$. Nous avons l'analogue des équations de Yule–Walker*

$$\Phi_n \begin{pmatrix} A_n \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \star \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \Phi_n = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1} & B_n \\ B_n^* & D_n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \widehat{T_{n-1}} \\ \widehat{N_n} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{T_{n-1}} \\ \widehat{N_n} \end{pmatrix}$$

où $\star = D_n - B_n^*\Phi_{n-1}^{-1}B_n$ est le complément de Schur de Φ_{n-1} par rapport à Φ_n. En particulier, A_n est donné par la formule $A_n = -\Phi_{n-1}^{-1}B_n$.

3. Extension en bande (*band extension*)

Nous introduisons $L_n = \{t \in T_n;\ t \asymp t_0\}$ (lorsque $q = 1$ et $t_0 = 0$ nous avons $L_n = \{0\}$) et remarquons que

$$T'_n \stackrel{\text{def.}}{=} T_{n+1} \setminus L_{n+1} = \big\{t \in \mathcal{T},\ t_0\gamma \preceq t \text{ et } d(t_0\gamma, t) \leqslant n\big\}.$$

Ce dernier ensemble est isométrique à T_n (voir (1)), et donc la compression Φ'_n de Φ_{n+1} à $\widehat{T'_n}$ est unitairement équivalente à Φ_n. Lorsque $q = 1$, cela est exactement la structure de Toeplitz.

Définition 3.1. Supposons $\Phi_n > 0$ et stationnaire. La matrice

$$\Phi_{n+1} = \begin{pmatrix} \Phi_n & B_{n+1} \\ B^*_{n+1} & D_{n+1} \end{pmatrix}$$

est appelée extension en bande de Φ_n si elle vérifie les équations de Yule–Walker avec A_{n+1} de la forme

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_n \end{pmatrix} : \widehat{N_{n+1}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{L_n} \\ \widehat{T_n \setminus L_n} \end{pmatrix}.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2. *L'extension en bande existe, est unique. Elle est strictement positive et stationnaire.*

Dans la preuve nous utilisons la notion suivante :

Définition 3.3. Une isométrie $\sigma : T_{n+1} \mapsto T_{n+1}$ est dite préserver la structure si $t\sigma \asymp t$ pour tout choix de $t \in T_{n+1}$ et si $t\gamma \in T_{n+1} \Rightarrow t\gamma\sigma = t\sigma\gamma$.

Pour une telle isométrie nous avons

$$d(u, u \wedge v) = d\big(u\sigma, (u\sigma) \wedge (v\sigma)\big), \quad \forall u, v \in T_{n+1},$$

et donc l'opérateur unitaire induit

$$\sigma : \widehat{T_{n+1}} \longrightarrow \widehat{T_{n+1}}, \quad \sigma e_t = e_{t\sigma^{-1}}$$

commute avec chaque opérateur stationnaire de $\widehat{T_{n+1}}$.

Nou démontrons maintenant le théorème. Deux situations sont à distinguer. Si n est pair, $N_{n+1} \cap L_{n+1} = \{\emptyset\}$, et $\operatorname{diam} N_{n+1} < n + 1$. Au contraire nous avons $N_{n+1} \cap L_{n+1} \neq \{\emptyset\}$ et $\operatorname{diam} N_{n+1} = n + 1$ lorsque n est impair. Dans le premier cas, les méthodes de [9] peuvent être adaptées (voir en particulier [9, Theorem 1.1 p. 908]). Dans le second cas, nous perdons la structure de bande des données. Cette dichotomie n'apparaît pas lorsque $q = 1$.

Existence. Nous commençons par le cas où n est pair. On a alors $N_{n+1} = N'_n = T'_n \setminus T'_{n-1}$, et donc

$$D_{n+1} = D'_n \quad \text{et} \quad B_{n+1} = \begin{pmatrix} G_{n+1} \\ B'_n \end{pmatrix} : \widehat{N_{n+1}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{L_n} \\ \widehat{T'_{n-1}} \end{pmatrix},$$

où $\Phi'_n = \begin{pmatrix} \Phi'_{n-1} & B'_n \\ (B'_n)^* & D'_n \end{pmatrix}$ est calculée à partir de Φ_n par l'isométrie entre T_n et T'_n. Nous calculons G_{n+1} de la manière suivante : on a

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} E_n & C_n \\ C^*_n & \Phi'_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{L_n} \\ \widehat{T'_{n-1}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{L_n} \\ \widehat{T'_{n-1}} \end{pmatrix}$$

et les équations de Yule–Walker donnent

$$\Phi'_{n-1} R_n + B'_n = 0 \quad \text{et} \quad C_n R_n + G_{n+1} = 0,$$

d'où nous obtenons $G_{n+1} = C_n (\Phi'_{n-1})^{-1} B'_n$.

Dans le second cas $N_{n+1}=N'_n\cup(N_{n+1}\cap L_{n+1})$, où l'union est disjointe. Nous avons les décompositions

$$D_{n+1}=\begin{pmatrix} D'_n & P_{n+1}\\ P^*_{n+1} & Q_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{N'_n}\\ \widehat{N_{n+1}\cap L_{n+1}}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\widehat{N'_n}\\ \widehat{N_{n+1}\cap L_{n+1}}\end{pmatrix}$$

et

$$B_{n+1}=\begin{pmatrix} G_{n+1} & F_{n+1}\\ B'_n & H_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{N'_n}\\ \widehat{N_{n+1}\cap L_{n+1}}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\widehat{L_n}\\ \widehat{T'_{n-1}}\end{pmatrix}.$$

L'opérateur P_{n+1} est déterminée de manière unique par l'opérateur G_{n+1} du fait de la stationnarité. Les opérateurs H_{n+1} et Q_{n+1} sont des entrées de Φ_n et donc connues. Les équations de Yule–Walker nous donnent

$$(G_{n+1}\ F_{n+1})=C_n\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}\big(B'_n\ H_{n+1}\big).$$

Positivité. La positivité de l'extension se démontre de manière classique en calculant un complément de Schur. Il s'agit de montrer que

$$D_{n+1}-B^*_{n+1}\Phi_n^{-1}B_{n+1}=D_{n+1}-R^*_n\Phi'_{n-1}R_n>0. \tag{2}$$

Lorsque n est pair nous avons

$$D_{n+1}-R^*_n\Phi'_{n-1}R_n=D'_n-\big(B'_n\big)^*\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}B'_n>0$$

puisque cette expression est le complément de Schur de D'_n dans Φ'_n. Lorsque n est impair,

$$D_{n+1}-R^*_n\Phi'_{n-1}R_n=\begin{pmatrix} D'_n-(B'_n)^*(\Phi'_{n-1})^{-1}B'_n & P_{n+1}-(B'_n)^*(\Phi'_{n-1})^{-1}H_{n+1}\\ P^*_{n+1}-H^*_{n+1}(\Phi'_{n-1})^{-1}B'_n & Q_{n+1}-H^*_{n+1}(\Phi'_{n-1})^{-1}H_{n+1}\end{pmatrix}.$$

Lemme 3.4. *Supposons n impair. Il existe alors une isométrie $\rho:T_{n+1}\to T_{n+1}$ qui préserve la structure et telle $(N_{n+1}\cap L_{n+1})\rho=L_n$.*

Une telle isométrie induit un opérateur unitaire ρ sur $\widehat{T_{n+1}}$ tel que

$$H_{n+1}=\rho C^*_n\rho^*,\quad P_{n+1}=\rho G^*_{n+1}\rho^*,\quad Q_{n+1}=\rho E_n\rho^*.$$

Nous avons donc :

$$P_{n+1}-\big(B'_n\big)^*\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}H_{n+1}=\rho G^*_{n+1}\rho^*-\big(B'_n\big)^*\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}\rho C^*_n\rho^*=\rho\big(G^*_{n+1}-\big(B'_n\big)^*\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}C^*_n\big)\rho^*=0,$$

puisque $(B'_n)^*$, Φ'_{n-1} sont stationnaires et $\widehat{N'_n}$, $\widehat{T'_{n-1}}$ sont des sous espaces ρ-invariants de $\widehat{T_{n+1}}$. De plus

$$Q_{n+1}-H^*_{n+1}\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}H_{n+1}=\rho\big(E_n-C_n\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}C^*_n\big)\rho^*>0$$

puisque $E_n-C_n(\Phi'_{n-1})^{-1}C^*_n$ est le complément de Schur de E_n dans Φ_n. On en déduit que (2) a lieu.

Stationnarité. La stationnarité se montre à partir du lemme suivant :

Lemme 3.5. *Étant donnés des sommets $t_1,t_2\in N_{n+1}$ et $s_1,s_2\in L_n$ tels que*

$$d(t_1,t_1\wedge s_1)=d(t_2,t_2\wedge s_2)\quad\text{et}\quad d(s_1,t_1\wedge s_1)=d(s_2,t_2\wedge s_2),$$

il existe une isométrie $\tau:T_{n+1}\to T_{n+1}$ qui préserve la structure et telle que $s_1\tau=s_2$, $t_1\tau=t_2$, $N_{n+1}\tau=N_{n+1}$.

En effet, les sous espaces $\widehat{L_n}$, $\widehat{N'_n}$, $\widehat{T'_{n-1}}$ sont invariants pour l'opérateur unitaire $\tau:\widehat{T_{n+1}}\to\widehat{T_{n+1}}$. Lorsque n est pair il suffit de montrer que G_{n+1} est stationnaire : $\tau G_{n+1}=G_{n+1}\tau$. Nous avons :

$$\tau^*G_{n+1}\tau=\tau^*C_n\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}B'_n\tau=\big(\tau^*C_n\tau\big)\big(\tau^*\big(\Phi'_{n-1}\big)^{-1}\tau\big)\big(\tau^*B'_n\tau\big).$$

Ces égalités permettent de conclure puisque tous les blocs dans les décompositions de Φ_n sont encore stationnaires. Dans le second cas, il faut montrer que $(G_{n+1}\ F_{n+1})$ est stationnaire. La démonstration est semblable.

4. Processus isotropes

Dans cette section nous considérons le cas particulier isotrope et nous pouvons utiliser les méthodes de la section précédente. Nous avons :

Théorème 4.1. *Supposons $\Phi_n > 0$ et isotrope. L'extension en bande Φ_{n+1} est isotrope.*

Nous caractérisons maintenant les processus isotropes en utilisant les méthodes de [2] et [3]. Rappelons (voir [3]) que les opérateurs stationnaires sont de la forme

$$S = \left(\sum_{m=0}^{\infty} s_{0,m}\omega_m\right) + \sum_{n\geqslant 1,\, m\geqslant 0} \left(\gamma^n \omega_m s_{n,m} + s_{-n,m}\omega_m \gamma^{*n}\right), \tag{3}$$

où les $s_{n,m} \in \mathbb{C}$ et où $\omega_m = \gamma^m \gamma^{*m} - \gamma^{m+1}\gamma^{(m+1)*}$.

Théorème 4.2. *Un opérateur borné $S : \ell_2(\mathcal{T}) \mapsto \ell_2(\mathcal{T})$ est isotrope si et seulement si les $s_{n,m}$ sont réels et satisfont les récursions*

$$s_{-n,m} = s_{n,m} = \sum_{\ell=0}^{m} s_{n+2\ell,0}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Dans ce cas nous avons

$$s_{n,m} = \sum_{\ell=0}^{m} 2^{\ell+n/2}\big(r(n+2\ell) - r(n+2\ell+2)\big) \quad \textit{et} \quad r(n) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k/2} s_{k,0}.$$

5. Conclusions

La méthode exposée nous permet de résoudre le problème d'extension des covariances de manière itérative. Nous remarquons que la plupart des définitions et résultats restent valables dans le cas $q > 2$. Cependant, dans la démonstration du Théorème 3.2, Q_{n+1} est déterminée par les entrées de F_{n+1}, et les calculs semblent beaucoup plus compliqués. C'est la raison pour laquelle nous considérons uniquement le cas dyadique dans cette Note. Enfin, nous remarquons que les formules (4) et (3) permettent de reformuler les problèmes décrits dans les premières sections de la note et d'obtenir des nouveaux problèmes pour le cas $q = 1$.

Remerciements

Daniel Alpay est titulaire de la chaire Earl Katz en théorie des systèmes algébriques, et le travail de Dan Volok a été subventionné en partie par le « Center for Advanced Studies in Mathematics (CASM) » du département de mathématiques de l'Université Ben-Gurion du Negev.

Références

[1] D. Alpay, A. Dijksma, D. Volok, Évaluation ponctuelle et espace de Hardy : le cas multi-échelle, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (6) (2005) 415–420.
[2] D. Alpay, D. Volok, Interpolation et espace de Hardy sur l'arbre dyadique : le cas stationnaire, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 293–298.
[3] D. Alpay, D. Volok, Point evaluation and Hardy space on a homogeneous tree, Integral Equations Operator Theory 53 (2005) 1–22.
[4] J.P. Arnaud, Stationary processes indexed by a homogeneous tree, Ann. Probab. 22 (1) (1994) 195–218.
[5] M. Basseville, A. Benveniste, A. Willsky, Multiscale statistical signal processing, in: Wavelets and Applications, Marseille, 1989, in: RMA Res. Notes Appl. Math., vol. 20, Masson, Paris, 1992, pp. 354–367.
[6] A. Benveniste, R. Nikoukhah, A. Willsky, Multiscale system theory, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. 41 (1) (1994) 2–15.
[7] P. Cartier, Fonctions harmoniques sur un arbre, in : Convegno di Calcolo delle Probabilità, INDAM, Rome, 1971, in : Symposia Mathematica, vol. IX, Academic Press, London, 1972, pp. 203–270.
[8] H. Dym, I. Gohberg, Extensions of band matrices with band inverses, Linear Algebra Appl. 36 (1986) 1–24.
[9] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, Classes of Linear Operators, vol. II, Operator Theory Adv. Appl., vol. 63, Birkhäuser, Basel, 1993.
[10] A. van den Bos, Alternative interpretation of maximum entropy spectral analysis, IEEE Trans. Inform. Theory 17 (1971) 493–494.