Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 337–340
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

Le cocycle brownien de degré deux comme bruit blanc sur les droites affines de l'espace

Jérôme Depauw

Université François Rabelais de Tours, laboratoire de mathématiques et physique théorique, CNRS UMR 6083, parc de Grandmont, 37000 Tours, France

Reçu le 19 mars 2005 ; accepté le 12 décembre 2005

Disponible sur Internet le 18 janvier 2006

Présenté par Marc Yor

Résumé

Inspirés par le travail de Čencov [N.N. Čencov, Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 3 (1957) 281–282. [1]] sur le mouvement brownien de Lévy à plusieurs paramètres (voir [P. Lévy, Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Suivi d'une note de M. Loève, Gauthier-Villars, Paris, 1948. [4]]), nous montrons que le bruit blanc sur les droites affines en dimension trois engendre un cocycle de degré deux, dont les restrictions aux plans ont la loi du drap brownien plan. Nous vérifions que ce cocycle de degré deux est le même que celui étudié par nous dans un précédent travail. Par conséquent nous donnons ici une autre preuve de l'existence du cocycle brownien de degré deux en dimension trois. De plus cette construction est adaptée à la simulation numérique. ***Pour citer cet article : J. Depauw, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

The Brownian cocycle of degree two as white noise on the straight lines of the space. Inspired by the work of Čencov [N.N. Čencov, Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 3 (1957) 281–282. [1]] on multiparameter Lévy's Brownian motion (see [P. Lévy, Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Suivi d'une note de M. Loève, Gauthier-Villars, Paris, 1948. [4]]), we show that the white noise on the straight lines in dimension three generates a cocycle of degree two, whose restrictions to plans have the law of plane Brownian sheets. We check that this degree two cocycle is the same than the one studied by us in a preceding work. Consequently we give here another proof of the existence of the degree two Brownian cocycle in dimension three. Moreover this construction is adapted to the numerical simulation. ***To cite this article: J. Depauw, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

Dans un article précédent [2], nous avons construit un champ aléatoire gaussien centré $(X_\Sigma)_{\Sigma\in S}$ indexé par l'ensemble S des surfaces triangulaires orientées dans $\mathbb{R}^3$, avec les propriétés suivantes :

Adresse e-mail : depauw@univ-tours.fr (J. Depauw).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.12.030

– la loi de $(X_\Sigma)_{\Sigma\in S}$ est invariante par les isométries affines de $\mathbb{R}^3$;
– pour toute famille finie de triangles orientés $(\Sigma_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ qui forment le bord orienté d'un volume polyédrique, on a $\sum_{i=1}^n X_{\Sigma_i}=0$ p.s. ;
– si les surfaces triangulaires Σ, Σ' sont dans le même plan, la covariance $\operatorname{cov}(X_\Sigma, X_{\Sigma'})$ est, au signe près, l'aire $|\Sigma\cap\Sigma'|$ de l'intersection de Σ et de Σ' : $\operatorname{cov}(X_\Sigma, X_{\Sigma'})=\pm|\Sigma\cap\Sigma'|$ (le signe étant positif si Σ et Σ' ont la même orientation, négatif sinon).

Les deux premières propriétés permettent de représenter le champ gaussien $(B_\Sigma)_\Sigma$, sur l'espace de ses trajectoires, comme un cocycle de degré 2 pour l'action stationnaire de $\mathbb{R}^3$ correspondant aux translations des surfaces triangulaires (sur les cocycles de degré 2 d'une action de $\mathbb{R}^3$, voir [2] ou [3]). Dans cet article, nous donnons une construction géométrique de ce champ gaussien, en utilisant le bruit blanc gaussien sur les droites affines orientées de $\mathbb{R}^3$. Cette contruction s'étend au bruit poissonien, et a des applications en simulation numérique.

2. Bruit blanc sur les droites affines orientées

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$, et O son origine 0. Soit G le groupe des isométries affines directes (ou déplacements) de $\mathbb{R}^3$, et H le sous-groupe de G engendré par les translations de vecteur parallèle à e_1 et les rotations d'axe (O, e_1). Puisque H est le sous-groupe qui fixe la droite affine orientée (O, e_1), l'espace homogène G/H est l'espace des droites affines orientées de $\mathbb{R}^3$. Soient $\mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}h$ les mesures de Haar invariantes à gauche sur G et H. Puisque G est unimodulaire, il existe une unique mesure $\mathrm{d}m$ sur G/H invariante par l'action de G, définie par la formule de désintégration de Weil (voir [7]) $\int_G f(g)\,\mathrm{d}g=\int_{G/H}\int_H f(gh)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}m(gH)$. Le bruit blanc sur G/H est le champ gaussien centré $(\mathbf{B}_A)_A$ indexé par les ensembles boréliens A de G/H, défini par la covariance : $\operatorname{cov}(\mathbf{B}_A, \mathbf{B}_{A'})=m(A\cap A')$. Notons que la mesure m, et par suite le bruit blanc, sont définis à une constante multiplicative près. Dans la suite, nous appellerons « la » mesure G-invariante m celle qui apparaît dans le lemme de Santaló ci-dessous.

3. Cocycle brownien de degré deux

Le cocycle brownien de degré deux dans $\mathbb{R}^3$ est le champ gaussien centré $(X_\Sigma)_\Sigma$ indexé par les surfaces triangulaires Σ de $\mathbb{R}^3$, défini par la covariance suivante :

$$\operatorname{cov}(X_\Sigma, X_{\Sigma'})=\int_{\partial\Sigma}\int_{\partial\Sigma'}-\frac{1}{2\pi}\ln\bigl\|\overrightarrow{MM'}\bigr\|\bigl\langle\mathrm{d}\vec{\ell}(M), \mathrm{d}\vec{\ell}'(M')\bigr\rangle, \tag{1}$$

où $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}'$ sont les champs de vecteurs infinitésimaux tangents aux bords $\partial\Sigma$ et $\partial\Sigma'$. Supposons que Σ et Σ' ne sont pas contenues pas dans le même plan. En utilisant la formule de Stokes, on a

$$\operatorname{cov}(X_\Sigma, X_{\Sigma'})=\int_{\Sigma}\int_{\Sigma'}\frac{1}{\pi\|\overrightarrow{MM'}\|^4}\bigl\langle\mathrm{d}\vec{\sigma}(M), \overrightarrow{MM'}\bigr\rangle\bigl\langle\mathrm{d}\vec{\sigma}'(M'), \overrightarrow{MM'}\bigr\rangle, \tag{2}$$

où $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ et $\mathrm{d}\vec{\sigma}'$ sont les champs de vecteurs infinitésimaux normaux aux surfaces Σ et Σ'. Si Σ et Σ' sont contenus dans le même plan (l'intégrale (2) n'est alors plus définie), la covariance (1) est égale, au signe près, à l'aire $|\Sigma\cap\Sigma'|$ de l'intersection de Σ et de Σ' :

$$\operatorname{cov}(X_\Sigma, X_{\Sigma'})=\pm|\Sigma\cap\Sigma'| \tag{3}$$

le signe étant positif si Σ et Σ' ont la même orientation, négatif sinon (voir [2] pour ces formules).

4. Lien entre bruit blanc et cocycle brownien

Pour toute surface triangulaire orientée $\Sigma\in S$, notons $A(\Sigma)$ l'ensemble des droites affines orientées qui coupent Σ. Pour toute droite affine orientée $D\in A(\Sigma)$, soit $\vec{v}$ son vecteur normé d'orientation. Soit $A_+(\Sigma)$ (resp. $A_-(\Sigma)$) le sous-ensemble de $A(\Sigma)$ défini par l'équation $\langle\vec{n}, \vec{v}\rangle>0$ (resp. $\langle\vec{n}, \vec{v}\rangle<0$), où $\vec{n}$ est le vecteur normal orienté de Σ.

Considérons le processus gaussien représentant l'intersection du bruit blanc défini ci-dessus avec les surfaces $\Sigma \in S$. C'est le champ gaussien $(B_\Sigma)_{\Sigma \in S}$, défini par

$$B_\Sigma = \mathbf{B}_{A_+(\Sigma)} - \mathbf{B}_{A_-(\Sigma)}. \tag{4}$$

Les notions ci-dessus sont bien définies, excepté pour les droites affines tangentes à Σ, et celles qui coupent le bord $\partial\Sigma$. Puisque cela forme un ensemble négligeable modulo m, les ensembles $A_+(\Sigma)$ et $A_-(\Sigma)$ sont définis modulo m, et la loi du champ $(B_\Sigma)_\Sigma$ est bien définie.

Notre but est de montrer que les champs gaussiens $(X_\Sigma)_\Sigma$ et $(B_\Sigma)_\Sigma$ ont la même loi. C'est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soient P et P' deux plans affines orientés différents dans $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ leurs vecteurs normaux d'orientation. Soient $\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}\sigma'$ leurs éléments infinitésimaux de surface, déduits de la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Pour toute droite affine orientée D dans $\mathbb{R}^3$ transverse à ces deux plans, soient M, M' les points des intersections de D avec ces plans. La mesure G-invariante m sur G/H a l'expression suivante* :

$$\mathrm{d}m(D) = \frac{1}{2\pi \|\overrightarrow{MM'}\|^4} \left|\langle \mathrm{d}\vec{\sigma}(M), \overrightarrow{MM'}\rangle \langle \mathrm{d}\vec{\sigma}'(M'), \overrightarrow{MM'}\rangle\right|,$$

où $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ *et* $\mathrm{d}\vec{\sigma}' = \vec{n}'\,\mathrm{d}\sigma'$.

Ce théorème est une conséquence directe de l'expression suivante de la mesure m donnée dans [6] (formule (24.21) p. 122).

Lemme (Santaló). *Soit P un plan affine orienté dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ son champ de vecteur normal infinitésimal. Pour toute droite affine orientée D transverse à P, soit M son intersection avec P, et soit $\vec{v} \in D$ son vecteur normé direct. La mesure G-invariante m sur G/H s'écrit*

$$\mathrm{d}m(D) = \frac{1}{2\pi} \left|\langle \mathrm{d}\vec{\sigma}(M), \vec{v}\rangle\right| \mathrm{d}\vec{v},$$

où $\mathrm{d}\vec{v}$ *est la mesure uniforme sur la sphère de rayon* 1.

La constante multiplicative $\frac{1}{2\pi}$ est choisie pour que la mesure image de la mesure m par la projection $D = (M, \vec{v}) \mapsto M$ soit la mesure d'aire $\mathrm{d}\sigma$ de P.

Démonstration du Théorème 4.1. Considérons, sur l'expression de la mesure m donnée par le Lemme de Santaló, le changement de variable $\vec{v} \mapsto M'$, où M' est le point d'intersection de la droite orientée $D = (M, \vec{v})$ avec le plan P'. La mesure d'aire sur le plan P', à M fixé, ayant l'expression $\mathrm{d}\sigma'(M') = \frac{r^2}{|\langle \vec{n}', \vec{v}\rangle|}\,\mathrm{d}\vec{v}$, où $r = \|\overrightarrow{MM'}\|$, on obtient $\mathrm{d}m(D) = \frac{1}{2\pi r^2} |\langle \mathrm{d}\vec{\sigma}'(M'), \vec{v}\rangle \langle \mathrm{d}\vec{\sigma}(M), \vec{v}\rangle|$, ce qui démontre le Théorème 4.1. $\square$

Loi du champ $(B_\Sigma)_{\Sigma\in S}$. Considérons le champ gaussien $(B_\Sigma)_\Sigma$ défini ci-dessus par (4). On a, quels que soient Σ et Σ' deux triangles orientés,

$$\mathrm{cov}(B_\Sigma, B_{\Sigma'}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_{\varepsilon'=\pm 1} \varepsilon\varepsilon' m\big(A_\varepsilon(\Sigma) \cap A_{\varepsilon'}(\Sigma')\big). \tag{5}$$

Pour montrer que $(B_\Sigma)_\Sigma$ et $(X_\Sigma)_\Sigma$ ont même loi, il suffit de montrer que la covariance $\mathrm{cov}(B_\Sigma, B_{\Sigma'})$ a l'expression (2) ou (3), suivant que Σ et Σ' sont dans le même plan ou non.

Supposons pour commencer que Σ et Σ' sont dans un même plan P. On peut alors supposer qu'ils ont la même orientation, c'est-à-dire qu'ils ont même vecteur normal $\vec{n} = \vec{n}'$. On a alors $A_\varepsilon(\Sigma) \cap A_{\varepsilon'}(\Sigma') = \emptyset$ si $\varepsilon \neq \varepsilon'$. La somme (5) sur ε, ε' ci-dessus devient donc $\mathrm{cov}(B_\Sigma, B_{\Sigma'}) = m(A(\Sigma) \cap A(\Sigma'))$. Considérons la désintégration de la mesure m, en M et $\vec{v}$, donnée par le Lemme de Santaló. Le domaine de M correspondant à $A(\Sigma) \cap A(\Sigma')$ est $\Sigma \cap \Sigma'$. D'autre part, à $M \in \Sigma \cap \Sigma'$ fixé, la section sur $\vec{v}$ est toute la sphère de rayon 1. On a donc, après une première intégration en $\vec{v}$, $m(A(\Sigma) \cap A(\Sigma')) = \int_{\Sigma\cap\Sigma'} \mathrm{d}\sigma(M)$, ce qui est bien l'expression (3) attendue.

Supposons maintenant que Σ et Σ' sont dans deux plans P et P' différents. D'après le Théorème 4.1, la somme (5) s'écrit

$$\operatorname{cov}(B_\Sigma, B_{\Sigma'}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_{\varepsilon'=\pm 1} \iint \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2\pi \|\overrightarrow{MM'}\|^4} \left| \langle \mathrm{d}\vec{\sigma}(M), \overrightarrow{MM'} \rangle \langle \mathrm{d}\vec{\sigma}'(M'), \overrightarrow{MM'} \rangle \right|,$$

chaque intégrale double portant sur les droites $D \in A_\varepsilon(\Sigma) \cap A_{\varepsilon'}(\Sigma')$. On remarque qu'alors le signe $\varepsilon\varepsilon'$ est exactement celui qui compense la valeur absolue, et qu'à chaque couple (M, M') correspond 2 droites orientées. On retrouve donc l'expression (2) attendue.

5. Extensions

Cette construction peut s'étendre a des surfaces Σ qui sont des sous-variétés compactes, orientées, à bord, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit, pour tout entier k, l'ensemble $A_k(\Sigma)$ des droites affines orientées, dont l'indice algébrique d'intersection avec la surface Σ est k. D'après le théorème de Sard, les ensembles $A_k(\Sigma)$ sont définis modulo m. Le champ d'intersection $(B_\Sigma)_\Sigma$ est alors défini par

$$B_\Sigma = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \mathbf{B}_{A_k(\Sigma)}.$$

La covariance est donnée par la formule (1).

Cette construction peut aussi s'étendre aux dimensions et degrés supérieurs. Soit S_k l'ensemble des simplexes orientés de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Le champ gaussien $(B_\Sigma)_{\Sigma \in S_k}$ correspondant aux intersections des simplexes $\in S_k$, avec le bruit blanc sur les sous-espaces affines orientés de dimension $n-k$, est un cocycle brownien de degré k dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il vérifie :

- la loi de $(B_\Sigma)_{\Sigma \in S_k}$ est invariante par les isométries affines de $\mathbb{R}^n$;
- pour toute famille finie de simplexes orientés $(\Sigma_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+2}$ qui forment le bord orienté d'un simplexe de dimension $k+1$, on a $\sum_{i=1}^{k+2} B_{\Sigma_i} = 0$ p.s. ;
- si les simplexes Σ, Σ' sont dans le même sous-espace affine de dimension k, la covariance $\operatorname{cov}(B_\Sigma, B_{\Sigma'})$ est, au signe près, le volume $|\Sigma \cap \Sigma'|$ de l'intersection de Σ et de Σ' : $\operatorname{cov}(B_\Sigma, B_{\Sigma'}) = \pm|\Sigma \cap \Sigma'|$ (le signe étant positif si Σ et Σ' ont la même orientation, négatif sinon).

Enfin, cette construction s'étend au processus de Poisson sur l'espace G/H, dont la mesure d'intensité est m. Ceci permet de généraliser la construction faite dans [5] pour l'approximation et la simulation du mouvement brownien à plusieurs paramètres de Lévy.

Références

[1] N.N. Čencov, Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2 (1957) 281–282.
[2] J. Depauw, Degree two Brownian sheet in dimension three. A paraître à Probab. Theory Related Fields. Référence électronique (DOI): 10.1007/s00440-005-0463-2.
[3] J. Depauw, Degree two ergodic theorem for divergence-free stationary random fields, A paraître à Israel J. Math.
[4] P. Lévy, Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Suivi d'une note de M. Loève, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
[5] B. Mandelbrot, Fonctions aléatoires pluri-temporelles : approximation poissonienne du cas brownien et généralisations, C. R. Acad. Sci. Paris 280 (1975) 1075–1078.
[6] L.A. Santaló, Introduction to Integral Geometry, Actualités Sci. Indust., vol. 1198, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago II. Herman et Cie, Paris, 1953.
[7] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités Sci. Indust., vol. 869, Hermann et Cie, Paris, 1940.