



Probabilités

# Moyennes empiriques pour les mosaïques de Voronoi du disque de Poincaré

Fabien Lips

*Institut Camille-Jordan, université Claude-Bernard Lyon 1, 69366 Lyon cedex 07, France*

Reçu le 22 décembre 2005 ; accepté le 6 février 2006

Disponible sur Internet le 11 avril 2006

Présenté par Jean-Pierre Kahane

---

## Résumé

Soit  $\Phi$  un processus ponctuel stationnaire ergodique et d'intensité finie dans le disque de Poincaré. Après avoir défini la cellule typique associée à la mosaïque de Voronoi de  $\Phi$ , nous nous intéressons à la convergence des moyennes empiriques liées à cette mosaïque. Contrairement au cas euclidien, plusieurs choix naturels de moyennes existent, avec des comportements différents. Le cas où  $\Phi$  est un processus de Poisson est plus particulièrement explicité. *Pour citer cet article : F. Lips, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Empirical means for the Voronoi tessellations of the Poincaré disk.** Let  $\Phi$  be a stationary ergodic point process with finite intensity of the Poincaré disk. After defining the typical cell associated to the Voronoi tessellation of  $\Phi$ , we study the convergence of empirical means of this tessellation. Contrary to the Euclidean case, several natural choices of means exist, leading to different behavior. The case where  $\Phi$  is a Poisson process is more specifically characterized. *To cite this article: F. Lips, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

Let  $\Phi$  be a point process on the Poincaré disk  $D$ . The set of cells  $\mathcal{C}^x = \{y \in E, \forall x' \in \Phi, d(y, x) \leq d(y, x')\}$ ,  $x \in \Phi$  is the Voronoi tessellation associated to  $\Phi$ . In the following, we will always assume that  $\Phi$  is a stationary ergodic point process with finite intensity.

As in the Euclidean case, we can define the typical cell  $\mathcal{C}$  of this tessellation. In this article, we are interested in the relations between the law of  $\mathcal{C}$  and the empirical means associated to this tessellation. Let respectively  $\mathcal{C}_R^-$ ,  $\mathcal{C}_R^0$  et  $\mathcal{C}_R^+$  be the sets of Voronoi cells included in the ball of center 0 and radius  $R$ , having their nucleus in this ball or intersecting this ball. Denote by  $N_R^-$ ,  $N_R^0$  et  $N_R^+$  the cardinals of those sets. Contrary to the Euclidean case, the empirical means associated with those sets have different behaviors when  $R$  tends to infinity:

---

Adresse e-mail : [fabien.lips@univ-lyon1.fr](mailto:fabien.lips@univ-lyon1.fr) (F. Lips).

**Theorem 1.** *Let  $h$  be a measurable application of the set of convex polygons of  $D$  to  $\mathbb{R}^+$  invariant by the action of isometries of  $D$ . Then, almost surely:*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^0} h(C)}{N_R^0} = \mathbb{E}[h(C)].$$

**Theorem 2.** *Under the hypotheses of Theorem 1:*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)]}{\mathbb{E}[N_R^-]} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \subset B_r} h(C)] dr}{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \subset B_r}] dr}.$$

If, in addition,  $\mathbb{E}[N_R^+] < +\infty$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)]}{\mathbb{E}[N_R^+]} = \frac{\mathbb{E}[h(C)] + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \cap B_{-r} \neq \emptyset} h(C)] dr}{1 + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \cap B_{-r} \neq \emptyset}] dr}.$$

The sets  $B_r, r \geq 0$  (resp.  $B_{-r}, r > 0$ ) are horoballs containing (resp. not containing) the point 0 such that the distance from 0 to the boundary of those horoballs is equal to  $r$ .

It is natural to define the ‘empirical cells’  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  by their laws:  $\mathbb{E}[h(\mathcal{C}^-)] = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \subset B_r} h(C)] dr}{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \subset B_r}] dr}$  and  $\mathbb{E}[h(\mathcal{C}^+)] = \frac{\mathbb{E}[h(C)] + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \cap B_{-r} \neq \emptyset} h(C)] dr}{1 + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{C \cap B_{-r} \neq \emptyset}] dr}$ , for any function  $h$  invariant by rotations around 0.

To obtain the almost sure convergence of the empirical means  $\frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)}{N_R^-}$  and  $\frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)}{N_R^+}$ , we need some additional conditions:

**Theorem 3.** *Let  $h$  be a measurable application of the set of convex polygons of  $D$  to  $\mathbb{R}^+$  invariant by the action of isometries of  $D$ . Denote by  $\mathcal{C}_x$  the almost surely unique cell containing the point  $x$ . Assume that for all measurable subsets  $A$  of the set of hyperbolic convex polygons of  $D$ , the following condition is satisfied:*

$$\exists k > 0, \exists \theta > 0, \left| \text{Cov} \left( \frac{h(\mathcal{C}_x)}{v(\mathcal{C}_x)} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_x \in A}, \frac{h(\mathcal{C}_0)}{v(\mathcal{C}_0)} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_0 \in A} \right) \right| \leq k \exp(-\theta d(x, 0)).$$

Then, almost surely:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)}{N_R^-} = \mathbb{E}[h(\mathcal{C}^-)].$$

If, in addition,  $\mathbb{E}[N_R^+] < +\infty$ , then, almost surely:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)}{N_R^+} = \mathbb{E}[h(\mathcal{C}^+)].$$

In the particular case where  $\Phi$  is a Poisson process, all functions  $h$  such that  $h(\mathcal{C})$  is in  $L^p$  with  $p > 4$  satisfy those conditions. This includes the main geometrical characteristics of a cell and their positive powers (area, length of edges, number of vertices... ). Moreover, the following inclusions (in the sense of stochastic domination) are true for Poisson processes:  $\mathcal{C}^- \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{C}^+$ .

### 1. Introduction

Soit  $\Phi$  un processus ponctuel sur un espace métrique  $E$ . Les cellules  $\mathcal{C}^x = \{y \in E, \forall x' \in \Phi, d(y, x) \leq d(y, x')\}$ ,  $x \in \Phi$  constituent la mosaïque de Voronoi associée à  $\Phi$ .

Introduite par Gilbert en 1962 comme modèle statistique de la formation de cristaux en prenant pour  $\Phi$  un processus de Poisson ponctuel du plan, la notion de mosaïque de Voronoi aléatoire a de nos jours de nombreuses applications, dans des domaines aussi divers que l’astronomie [14], l’écologie [13], les télécommunications [1] ou la conduction

thermique [7]. Pour de plus amples informations sur ce domaine, on pourra se reporter au livre d’Okabe et al. [11]. Pour des travaux récents voir [3,4].

Les travaux mathématiques concernant cette mosaïque aléatoire sont généralement limités au cas de l’espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas des espaces hyperboliques de dimension deux et trois, Isokawa [5] a calculé les valeurs moyennes des caractéristiques géométriques des cellules de Voronoi (volume, aire des faces, longueur des arêtes, nombre de sommets) associées à un processus ponctuel de Poisson. Benjamini et Schramm [2] se sont intéressés à la percolation de Bernoulli sur la mosaïque de Voronoi associée à un processus de Poisson du plan hyperbolique. Onishi et Takayama [12] ont décrit un algorithme permettant de construire efficacement la mosaïque de Voronoi d’un ensemble (fixé, déterministe) de points du demi-plan de Poincaré.

Nous nous intéresserons ici aux distributions empiriques des cellules de la mosaïque de Voronoi pour un processus ponctuel  $\Phi$  du disque de Poincaré  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  muni de la distance  $d(z, z') = \operatorname{arctanh}|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}|$ . Nous noterons  $\nu$  l’unique mesure sur  $D$  invariante par l’action du groupe  $G = \{T^{x,t} := z \mapsto \frac{z-x}{1-\bar{x}z} e^{it}, x \in D, t \in [0, 2\pi[ \}$  des isométries positives de ce disque. Nous supposerons que  $\Phi$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\Phi$  est stationnaire : Nous supposerons que pour tout  $T \in G, \Phi \stackrel{\mathcal{L}}{=} T\Phi$  ;
- $\Phi$  est d’intensité finie : puisque  $\Phi$  est stationnaire, il existe un unique réel positif  $\lambda$ , appelée intensité de  $\Phi$  ; tel que  $\mathbb{E}[\operatorname{Card}(\Phi \cap B)] = \lambda\nu(B)$  pour tout borélien  $B$  de  $D$ . Nous supposerons  $0 < \lambda < +\infty$ .
- $\Phi$  est ergodique : Soit  $X$  l’ensemble des parties localement finies de  $D$  et  $\mu$  la loi de  $\Phi$ . Nous supposerons que l’action de  $G$  sur  $X$  est  $\mu$ -ergodique.

Classiquement, l’étude statistique de la mosaïque de Voronoi fait appel à la notion de cellule typique  $\mathcal{C}$  au sens de Palm [9]. La définition de cette cellule dans le cas hyperbolique présente cependant une difficulté conceptuelle due au fait que le groupe des isométries du plan hyperbolique ne contient pas de sous-groupe agissant de manière simplement transitive (à l’image du groupe des translations dans  $\mathbb{R}^n$ ). Cette difficulté peut cependant être contournée en définissant la mesure de Palm via la formule de Campbell [6]. On peut alors montrer que pour toute fonctionnelle positive  $h$  opérant sur l’ensemble des polygones convexes de  $D$ , on a :

$$\mathbb{E}[h(\mathcal{C})] = \frac{\mathbb{E}[\sum_{x \in \Phi \cup B} h(T^{x,t(x)}\mathcal{C}^x)]}{\lambda\nu(B)}$$

où  $B$  est un borélien de  $D$  vérifiant  $0 < \nu(B) < +\infty$  et  $t(x)$  une fonction mesurable de  $D$  dans  $[0, 2\pi[$ . Dans la suite, nous prendrons  $\tilde{T}^x = T^{x, -\arg(x)}$ . Ces transformations possèdent la propriété intéressante que pour tout point  $x$  à distance  $a$  du point 0, l’image de la boule de centre 0 et de rayon  $R$  par  $\tilde{T}^x$  ne dépend que de  $a$  et de  $R$ . Pour  $a = R - r > 0$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) et  $R$  tendant vers l’infini, cette image converge vers un ensemble que nous noterons  $B_r$ .

Dans le cas euclidien, l’intérêt de la notion de cellule typique réside dans le fait que sa loi coïncide avec la loi « empirique » qui exprime les propriétés statistiques de la mosaïque. Plus précisément, notons respectivement  $\mathcal{C}_R^-, \mathcal{C}_R^0$  et  $\mathcal{C}_R^+$  l’ensemble des cellules de Voronoi incluses dans la boule de centre 0 et de rayon  $R$ , ayant leur germe dans cette boule ou intersectant cette boule. Si  $h$  est une fonctionnelle invariante par translation suffisamment régulière, alors on a presque sûrement :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)}{N_R^-} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^0} h(C)}{N_R^0} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)}{N_R^+} = \mathbb{E}[h(\mathcal{C})]$$

où  $N_R^-, N_R^0$  et  $N_R^+$  représente le nombre de cellules des ensembles  $\mathcal{C}_R^-, \mathcal{C}_R^0$  et  $\mathcal{C}_R^+$ .

Dans le cas hyperbolique, du fait de la croissance exponentielle du volume des boules de  $D$ , ces trois limites ne coïncident plus.

## 2. Résultats

**Théorème 1.** Soit  $h$  une application mesurable de l’ensemble des polygones convexes de  $D$  dans  $\mathbb{R}^+$  invariante par l’action de  $G$ . Alors, presque sûrement :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^0} h(C)}{N_R^0} = \mathbb{E}[h(\mathcal{C})].$$

**Théorème 2.** *Sous les hypothèses du Théorème 1 :*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)]}{\mathbb{E}[N_R^-]} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \subset B_r h(C)] \, dr}{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \subset B_r] \, dr}.$$

Si, de plus,  $\mathbb{E}[N_R^+] < +\infty$ , alors :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)]}{\mathbb{E}[N_R^+]} = \frac{\mathbb{E}[h(C)] + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \cap B_{-r} \neq \emptyset h(C)] \, dr}{1 + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \cap B_{-r} \neq \emptyset] \, dr}.$$

La preuve du Théorème 1 repose sur les inégalités

$$\frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{B(R-\varepsilon)} \sum_{y \in \mathcal{P} \cap B(x,\varepsilon)} h(\mathcal{C}^y) \, dx \leq \sum_{C \in \mathcal{C}_R^0} h(C) \leq \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{B(R+\varepsilon)} \sum_{y \in \mathcal{P} \cap B(x,\varepsilon)} h(\mathcal{C}^y) \, dx$$

et fait appel à un théorème ergodique hyperbolique récemment démontré par Nevo et Stein [10] et analogue au théorème ergodique de Wiener.

La preuve du Théorème 2 repose sur un découpage de la boule de centre 0 et de rayon  $R$  en fines couronnes. Le choix particulier des transformations  $\tilde{T}^x$  permet d'aboutir au résultat.

Il est naturel de définir les « cellules empiriques »  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  par leurs lois :

$$\mathbb{E}[h(\mathcal{C}^-)] = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \subset B_r h(C)] \, dr}{\int_0^{+\infty} e^{-r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \subset B_r] \, dr}$$

et

$$\mathbb{E}[h(\mathcal{C}^+)] = \frac{\mathbb{E}[h(C)] + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \cap B_{-r} \neq \emptyset h(C)] \, dr}{1 + \int_0^{+\infty} e^r \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \cap B_{-r} \neq \emptyset] \, dr},$$

pour toute fonction  $h$  invariante par rotation autour de 0. Il semble raisonnable de penser que les variables aléatoires  $\frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)}{N_R^-}$  et  $\frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)}{N_R^+}$  convergent presque sûrement vers  $\mathbb{E}[h(\mathcal{C}^-)]$  et  $\mathbb{E}[h(\mathcal{C}^+)]$ . Nous sommes parvenus à prouver cette propriété sous une hypothèse supplémentaire. Notons  $\mathcal{C}_x$  la cellule (presque sûrement unique) contenant le point  $x$ . Nous obtenons :

**Théorème 3.** *Soit  $h$  une application mesurable de l'ensemble des polygones convexes de  $D$  dans  $\mathbb{R}^+$  invariante par l'action de  $G$ . Supposons de plus que  $h$  soit telle que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée pour tout sous-ensemble mesurable  $A$  de l'ensemble des polygones hyperboliques convexes de  $D$  :*

$$\exists k > 0, \exists \theta > 0, \left| \text{Cov} \left( \frac{h(\mathcal{C}_x)}{v(\mathcal{C}_x)} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_x \in A}, \frac{h(\mathcal{C}_0)}{v(\mathcal{C}_0)} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_0 \in A} \right) \right| \leq k \exp(-\theta d(x, 0)).$$

Alors, nous avons la convergence presque sûre suivante :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^-} h(C)}{N_R^-} = \mathbb{E}[h(\mathcal{C}^-)].$$

Si, de plus,  $\mathbb{E}[N_R^+] < +\infty$ , alors :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}_R^+} h(C)}{N_R^+} = \mathbb{E}[h(\mathcal{C}^+)].$$

Notons  $C(r, r')$  la couronne  $B(0, r') \setminus B(0, r)$ . Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'un théorème ergodique faisant intervenir les expressions limites de la forme :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{v(C(R, R+a))} \int_{C(R, R+a)} f(\tilde{T}^x \omega) \, dv(x)$$

pour  $a$  fixé. Le théorème de Nevo et Stein [10] ne concerne que des expressions invariantes par rotation :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi v(C(R, R+a))} \int_0^{2\pi} \int_{C(R, R+a)} f(T^{x,t} \omega) \, dv(x) \, dt.$$

S’inspirant des travaux de Margulis, Nevo et Stein [8], nous démontrons que :

**Théorème 4.** Soient  $a$  un réel strictement positif et  $f$  une fonction de l’ensemble des configurations de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$|\text{Cov}(f(\Phi), f(T\Phi))| \leq k e^{-\theta d(0, T(0))}$$

pour tout  $T \in G$  et certaines valeurs de  $k$  et de  $\theta$  strictement positives. Alors, pour tout  $a > 0$ , on a presque sûrement :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{v(C(R, R+a))} \int_{C(R, R+a)} f(\tilde{T}^x \omega) \, dv(x) = \mathbb{E}[f].$$

Dans le cas particulier d’un processus de Poisson, les conditions d’application du Théorème 3 sont vérifiées par une large classe de fonctionnelle. En effet :

**Théorème 5.** Supposons que  $\Phi$  soit un processus ponctuel de Poisson d’intensité  $0 < \lambda < +\infty$ . Soit  $h$  une application mesurable de l’ensemble des polygones convexes de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  invariante par l’action de  $G$  telle que la variable aléatoire  $h(C)$  appartienne à  $L^p$  pour un  $p > 4$ . Alors, il existe  $k > 0$  et  $\theta > 0$  tels que, pour tout sous-ensemble mesurable  $A$  de l’ensemble des polygones hyperboliques convexes de  $D$  :

$$\left| \text{Cov} \left( \frac{h(C_x)}{v(C_x)} \mathbb{1}_{C_x \in A}, \frac{h(C_0)}{v(C_0)} \mathbb{1}_{C_0 \in A} \right) \right| \leq k \exp(-\theta d(x, 0)).$$

Les caractéristiques géométriques des cellules (aire, périmètre, nombre de sommets) ainsi que toutes les puissances positives de ces caractéristiques vérifient cette propriété, ce qui permet de conclure (dans le cas particulier d’un processus ponctuel de Poisson) à la convergence des moyennes et des moments empiriques associés de ces fonctionnelles.

Le théorème suivant permet de clarifier les relations entre les différentes cellules empiriques :

**Théorème 6.** Soit  $\Phi$  un processus de Poisson d’intensité finie. Alors, la cellule  $C^-$  est stochastiquement dominée par la cellule  $C$ , elle-même stochastiquement dominée par la cellule  $C^+$ .

On peut noter que les techniques utilisées ici dans le cas particulier du disque de Poincaré peuvent se généraliser au cas plus général d’un espace homogène tel que le volume d’une boule de cet espace croisse exponentiellement en fonction de son rayon (outre les espaces hyperboliques de dimension supérieur, les arbres réguliers fournissent un exemple intéressant de tels espaces).

### Références

[1] F. Baccelli, B. Błaszczyszyn, On a coverage process ranging from the boolean model to the Poisson–Voronoi tessellation with applications to wireless communications, *Adv. Appl. Probab.* 33 (2001) 293–323.  
 [2] I. Benjamini, O. Schramm, Percolation in the hyperbolic plane, *J. Amer. Math. Soc.* 14 (2001) 487–507.  
 [3] P. Calka, De nouveaux résultats sur la géométrie des mosaïques de Poisson–Voronoi et des mosaïques poissonniennes d’hyperplans. Etude du modèle de fissuration de Rényi–Widom, PhD thesis, université Claude Bernard-Lyon 1, 2002.  
 [4] P. Calka, T. Schreiber, Limit theorems for the typical Poisson–Voronoi cell and the crofton cell with a large inradius, *Ann. Probab.* 33 (2005) 1625–1642.  
 [5] Y. Isokawa, Poisson–Voronoi tessellations in three-dimensional hyperbolic spaces, *Adv. Appl. Probab.* 32 (2000) 648–662.  
 [6] O. Kallenberg, *Random Measures*, Academic Press, 1983.  
 [7] S. Kumar, R.N. Singh, Thermal conductivity of polycrystalline materials, *J. Am. Ceramic Soc.* 78 (1995) 728–736.  
 [8] G.A. Margulis, A. Nevo, E.M. Stein, Analogs of wiener’s ergodic theorems for semisimple groups II, *Duke Math. J.* 103 (2000) 233–259.  
 [9] J. Møller, *Lecture Notes on Random Voronoi Tessellations*, Springer-Verlag, 1994.

- [10] A. Nevo, E.M. Stein, Analogs of Wiener's ergodic theorems for semisimple groups I, *Ann. Math.* 145 (1997) 565–595.
- [11] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S.N. Chiu, D.G. Kendall, *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley & Sons, 1992.
- [12] T. Onishi, N. Takayama, Construction of Voronoi diagram on the upper half-plane, in: *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol. E79-A, 1995, pp. 533–539, No. (4).
- [13] E. Pielou, *Mathematical Ecology*, Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [14] R. van de Weygaert, Fragmenting the universe III. The construction and statistics of 3d Voronoi tessellations, *Astronom. Astrophys.* 283 (1994) 361–406.