



Problèmes mathématiques de la mécanique

# Conditions aux limites approchées pour une plaque mince non linéaire

Leila Rahmani

*Faculté des sciences, département de mathématiques, université de Tizi-ouzou, 15315 Tizi-ouzou, Algérie*

Reçu le 7 mai 2005 ; accepté après révision le 13 avril 2006

Disponible sur Internet le 24 mai 2006

Présenté par Philippe G. Ciarlet

---

## Résumé

On considère le modèle dynamique non linéaire de von Kármán pour une plaque mince recouverte d'une fine couche élastique d'épaisseur  $\delta$ . On applique la méthode des développements asymptotiques formelle pour établir des conditions aux limites approchées modélisant l'effet de la couche mince sur la plaque. *Pour citer cet article : L. Rahmani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Approximate boundary conditions for a thin nonlinear plate.** We consider the nonlinear dynamic von Kármán model for a thin plate surrounded by a thin layer of thickness  $\delta$ . We apply the formal asymptotic expansions method to establish approximate boundary conditions that model the effect of the thin layer. *To cite this article: L. Rahmani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

The structures studied in engineering are often made of materials covered with thin layers. From a numerical point of view, such structures require the discretisation of the layer, which leads to difficult computations because of the small thickness of this latter. For this reason, the identification of approximate boundary conditions has received the attention of many researchers (see [1,2,4,5,8,9]). The idea is to seek an approximate problem without any layer but taking into account its effect via approximate boundary conditions. The following study deals with the special case of a thin plate surrounded by a thin elastic layer. The model considered is the dynamic nonlinear von Kármán system which describes the oscillations of a plate with large displacements. Using the formal asymptotic multi-scale expansions, we identify Ventcel's boundary conditions that incorporate the effect of the thin layer. These boundary conditions have been already obtained by the author (see [9]), through a completely different technique, to approximate the effect of a stiffener perfectly glued on a portion of a boundary of a thin plate.

---

Adresse e-mail : [rahmani\\_lei@yahoo.fr](mailto:rahmani_lei@yahoo.fr) (L. Rahmani).

Let  $\Omega_+$  be a bounded open subset of  $\mathbb{R}^2$  with boundary  $\Sigma \cup \Gamma$  ( $\bar{\Sigma} \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$ ) and  $\delta > 0$  a parameter. We introduce the open subset  $\Omega_-^\delta = \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, \Sigma) < \delta\}$ , with boundary  $\partial\Omega_-^\delta = \Sigma \cup \Sigma_-^\delta$ , where  $\Sigma_-^\delta = \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, \Sigma) = \delta\}$ . We denote by  $d$  the distance of the point  $x$  to  $\Sigma$  and we set  $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-^\delta$ .

We consider the full von Kármán system (1)–(6) for the whole bidimensional plate  $\Omega^\delta$ . The variables  $w$  and  $u = (u_1, u_2)$  represent respectively the vertical and in-plane displacement of the plate. We assume that the elastic coefficients of the material constituting the plate are independent of  $\delta$  and that are piecewise constant:  $E = E_+$  in  $\Omega_+$  and  $E = E_-$  in  $\Omega_-$ ;  $\mu = \mu_+$  in  $\Omega_+$  and  $\mu = \mu_-$  in  $\Omega_-$ ;  $\rho = \rho_+$  in  $\Omega_+$  and  $\rho = \rho_-$  in  $\Omega_-$ , where  $E$  is the Young's modulus,  $\mu$  is the Poisson ratio of the material and  $\rho$  is its mass density. The variational formulation of the problem (1)–(6) is given by (7). Making a change of scaling along the thickness of the thin layer, in order to have a problem posed over a set that does not depend on  $\delta$ , we obtain an equivalent variational problem for which we apply the formal asymptotic expansions method to establish approximate boundary conditions. The idea is to approximate the solution by the series given by its asymptotic expansion truncated at a given order. The conditions satisfied by this approximation on  $\Sigma$  gives the desired boundary conditions.

When considering the asymptotic expansion truncated at a order 0, we obtain the model (8) where the effect of the thin layer is completely neglected. So, it is more interesting to keep the first two terms in the asymptotic expansion. Indeed, carrying out the analysis until order 1 leads to the model (9) in which the effect of the thin layer is taken into account. The Ventcel boundary conditions (13)–(16) that model this effect are not standard since they involve tangential derivatives of order equal to that of the interior differential operator.

## 1. Introduction

Les structures étudiées par les ingénieurs sont souvent constituées de matériaux revêtus de couches minces. La simulation numérique du comportement de telles structures est difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche. Cette difficulté à approcher correctement la solution d'un tel problème a conduit plusieurs auteurs à s'intéresser à l'identification de conditions aux limites approchées (voir [1,2,4,5,8,9]). L'idée consiste à approcher le problème initial par un problème équivalent ne faisant pas intervenir la couche mince mais de nouvelles conditions aux limites qui rendent compte de son effet. L'étude qui suit traite le cas d'une structure constituée d'une plaque mince entourée d'une fine couche élastique. Le modèle considéré est celui de von Kármán, qui est un modèle bidimensionnel non linéaire, décrivant les vibrations de cette structure en grandes déformations. L'utilisation de la méthode des développements asymptotiques formels multi-échelle nous permet d'obtenir des conditions aux limites évolutives de Ventcel, similaires à celles obtenues par l'auteur, par passage à la limite, pour approcher l'effet d'un raidisseur posé sur le bord d'une plaque mince (voir [9]).

## 2. Position du problème

Soit  $\Omega_+$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^2$  présentant une inclusion. La frontière de  $\Omega_+$  est régulière composée d'un cercle  $\Gamma$  et d'une courbe  $\Sigma$  de classe  $C^\infty$  ( $\partial\Omega_+ = \Sigma \cup \Gamma$ ). Soit  $\delta > 0$  un paramètre. On définit dans  $\mathbb{R}^2$  l'ouvert  $\Omega_-^\delta = \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, \Sigma) < \delta\}$ , de frontière  $\partial\Omega_-^\delta = \Sigma \cup \Sigma_-^\delta$  où  $\Sigma_-^\delta = \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, \Sigma) = \delta\}$  et où  $d$  désigne la distance du point  $x$  au bord  $\Sigma$ . On note  $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-^\delta$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  représentant une plaque bidimensionnelle constituée par une plaque  $\Omega_+$  entourée d'une couche mince  $\Omega_-^\delta$ . En désignant par  $u = (u_1, u_2)$  le déplacement plan et  $w$  le déplacement transversal de la plaque, le système complet de von Kármán pour cette structure s'écrit (voir [3,6]) :

$$\rho u'' - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T), \quad (1)$$

$$\rho [I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nabla w\} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T) \quad (2)$$

avec les conditions d'encastrement sur le bord  $\Gamma$

$$u = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3)$$

et les conditions du bord libre sur  $\Sigma_-^\delta \times (0, T)$

$$\begin{aligned} C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu &= 0; & D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w] &= 0; \\ D\left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu)\frac{\partial B_2 w}{\partial s}\right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

On définit aussi les conditions de transmission sur  $\Sigma \times (0, T)$  par

$$\begin{aligned} \llbracket u \rrbracket &= 0, \quad \llbracket w \rrbracket = \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right] = 0; \quad \llbracket C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \rrbracket = 0; \quad \llbracket D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w] \rrbracket = 0, \\ \llbracket D \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 w}{\partial s} \right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w \rrbracket &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

où  $\llbracket \cdot \rrbracket$  désigne le saut à travers  $\Sigma$ . On associe avec (1) et (2) les conditions initiales

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1 \quad \text{dans } \Omega^\delta. \tag{6}$$

On désigne par  $\epsilon(u) = 1/2(\nabla u + \nabla^T u)$  le tenseur des déformations linéarisé et  $C$  une application linéaire de l'ensemble  $S$  des tenseurs symétriques d'ordre 4 dans lui même définie par :  $C(\zeta) = D[\mu(\text{tr } \zeta)I_S + (1 - \mu)\zeta] \forall \zeta \in S$ ,  $I_S$  étant l'identité dans  $S$ . La fonction  $f$  est définie par  $f(s) = (1/2)s \otimes s$ ,  $s \in \mathcal{R}^2$ . On note  $D = E/(1 - \mu^2)$  le module de rigidité de la plaque à la flexion ;  $E$  désigne le module de young,  $\mu$  le coefficient de Poisson et  $\rho$  la densité de masse du matériau. On suppose que  $E$ ,  $\mu$  et  $\rho$  ne dépendent pas de  $\delta$  et qu'ils valent respectivement  $E_+$ ,  $\mu_+$ ,  $\rho_+$  dans  $\Omega_+$  et  $E_-$ ,  $\mu_-$ ,  $\rho_-$  dans  $\Omega_-^\delta$ . Par conséquent,  $D$  sera noté  $D_+$  ou  $D_-$  selon que l'on se réfère à  $\Omega_+$  ou  $\Omega_-^\delta$ . On note  $s$  l'abscisse curviligne et  $\nu(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s))$  la normale extérieure à  $\Sigma$  en  $s$ . Les opérateurs de traces  $B_1$  et  $B_2$  sont définis par :

$$B_1 w \equiv 2\nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

et

$$B_2 w \equiv (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

En considérant les espaces

$$\begin{aligned} W(\Omega^\delta) &= \left\{ w \in H^2(\Omega^\delta); w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = 0 \right\}, \\ V(\Omega^\delta) &= \{ w \in H^1(\Omega^\delta); w|_\Gamma = 0 \}, \\ U(\Omega^\delta) &= \{ u \in (H^1(\Omega^\delta))^2; u|_\Gamma = 0 \} \end{aligned}$$

et en désignant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  le produit scalaire dans  $[L^2(D)]^k$ ,  $k \in N$ , la formulation variationnelle du problème ci-dessus s'écrit :

$$\begin{cases} \rho \langle u', \varphi \rangle_{\Omega^\delta}' + \langle C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)], \varepsilon(\varphi) \rangle_{\Omega^\delta} = 0, \quad \forall \varphi \in U(\Omega^\delta), \\ \rho \langle w', \psi \rangle_{\Omega^\delta} + \langle \nabla w', \nabla \psi \rangle_{\Omega^\delta}' + a(w, \psi) + \langle C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nabla w, \nabla \psi \rangle_{\Omega^\delta} = 0, \quad \forall \psi \in W(\Omega^\delta) \end{cases} \tag{7}$$

où :

$$a(w, \psi) = D \int_{\Omega^\delta} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} d\Omega^\delta \right\}.$$

Le problème variationnel (7), (6) admet une solution unique  $(u, w)$  vérifiant :

$$u \in C(0, T; U(\Omega^\delta)) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^2) \quad \text{et} \quad w \in C(0, T; W(\Omega^\delta)) \cap C^1(0, T; V(\Omega^\delta)).$$

(Voir [7].)

La dérivation des conditions aux limites approchées repose d'abord sur un changement d'échelle à l'intérieur de la couche mince qui permet d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis à vis du petit paramètre  $\delta$ . On introduit donc une paramétrisation en coordonnées locales et on dilate  $\Omega_-^\delta$  d'un facteur  $\frac{1}{\delta}$  dans la direction de la normale, dans le but de se ramener à un ouvert fixe. Soit  $\tau$  le vecteur unitaire tangent à  $\Sigma$  en  $s$  ( $s$  étant l'abscisse curviligne) de sorte que la base  $(\tau, \nu)$  soit directe. On désigne par  $R(s)$  la courbure de  $\Sigma$  en  $s$ . On fait alors un changement d'échelle qui associe à tout point courant  $(s, z)$  de l'ouvert  $\Omega_- = \Sigma \times ]0, 1[$  le point  $X = s + \delta z \nu(s)$  de  $\Omega_-^\delta$  et qui à chaque fonction  $\psi$  définie sur  $\Omega_-^\delta$  associe la fonction mise à l'échelle  $\psi^\delta$  définie sur  $\Omega_-$  par  $\psi^\delta = \psi(X)$ .

Tout champ de vecteurs  $\varphi$  défini sur  $\Omega_-^\delta$  sera décomposé en composante normale  $\varphi_\nu$  et en composante tangentielle  $\varphi_\tau$ . On lui associe par le changement d'échelle précédent le champ de vecteur  $\varphi^\delta$  défini sur  $\Omega_-$  par  $\varphi^\delta(s, z) = \varphi_\tau(s, \delta z)\tau + \delta\varphi_\nu(s, \delta z)\nu$ . On identifie  $\Sigma$  avec  $\Sigma \times \{0\}$  et on note  $\Sigma_- = \Sigma \times \{1\}$  l'image de  $\Sigma_-^\delta$ . Le problème (7) se transforme alors en un problème équivalent écrit sur un ouvert fixe lorsque  $\delta$  varie (pour les détails, voir [9]).

### 3. Conditions aux limites approchées

On utilise la technique des développements asymptotiques formels multi-échelle pour identifier des conditions aux limites approchées sur  $\Sigma$  qui rendent compte de l'effet de la couche mince. L'idée consiste à approcher la solution par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur  $\Sigma$  fournissant les conditions aux limites approchées recherchées.

On suppose que la solution admet un développement asymptotique formel en puissance positive de  $\delta$ . On conviendra d'indiquer par  $+$  ou  $-$  les différents termes de ce développement ou des données initiales suivant que l'on considère leur restriction à  $\Omega_+$  ou  $\Omega_-$ . On suppose qu'il existe des fonctions  $w_+^*$ ,  $w_+^{**}$ ,  $w_+^{***}$ ,  $u_+^*$ ,  $u_+^{**}$  et  $u_+^{***}$  indépendantes de  $\delta$  et vérifiant :

$$w_+^* \in H^2(\Omega_+), \quad w_+^*|_\Sigma \in H^2(\Sigma), \quad w_+^{**} \in H^1(\Omega_+), \quad w_+^{**}|_\Sigma \in H^1(\Sigma), \quad w_+^{***} \in L^2(\Sigma),$$

$$u_+^* \in [H^1(\Omega_+)]^2, \quad (u_\tau^*)|_\Sigma \in H^1(\Sigma), \quad u_+^{**} \in [L^2(\Omega_+)]^2, \quad u_+^{***} \in [L^2(\Sigma)]^2$$

et telles que :

$$w_{0+}^\delta = w_+^*, \quad \int_0^1 w_{0-}^\delta dz = w_+^*|_\Sigma, \quad w_{1+}^\delta = w_+^{**}, \quad \int_0^1 w_{1-}^\delta dz = w_+^{**}|_\Sigma, \quad \int_0^1 \frac{\partial w_{1-}^\delta}{\partial z} dz = \delta w_+^{***},$$

$$u_{0+}^\delta = u_+^*, \quad \int_0^1 (u_{0\tau}^\delta)_- dz = (u_\tau^*)|_\Sigma, \quad \int_0^1 (u_{0\nu}^\delta)_- dz = 0, \quad u_{1+}^\delta = u_+^{**},$$

$$\left( \int_0^1 (u_{1\tau}^\delta)_- dz, \int_0^1 \frac{1}{\delta} (u_{1\nu}^\delta)_- dz \right) = u_+^{***}.$$

En injectant toutes ces expressions dans le problème variationnel mis à l'échelle et en identifiant formellement les mêmes puissances en  $\delta$ , on aboutit à une hiérarchie d'équations qui permet de déterminer de façon itérative les termes du développement asymptotique. En définissant  $u_+^{\delta,j}$  (resp.  $w_+^{\delta,j}$ ) comme le développement asymptotique tronqué à l'ordre  $j$  de celui de  $u_+^\delta$  (resp.  $w_+^\delta$ ) et en utilisant les conditions de transmission, on montre le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Le terme  $(u_+^{\delta,0}, w_+^{\delta,0})$  résout le problème*

$$\begin{cases} \rho_+ [((u_+^{\delta,0})', \varphi)_{\Omega_+}]' + \rho_+ [((w_+^{\delta,0})', \psi)_{\Omega_+}]' + \rho_+ [((\nabla w_+^{\delta,0})', \nabla \psi)_{\Omega_+}]' + a_+(w_+^{\delta,0}, \psi) \\ \quad + N_+(u_+^{\delta,0}, w_+^{\delta,0}, \varphi, \psi) = 0, \quad \forall (\varphi, \psi) \in U^\delta(\Omega_+) \times W^\delta(\Omega_+), \\ u_+^{\delta,0}(0) = u_+^*, \quad (u_+^{\delta,0})'(0) = u_+^{**}, \quad w_+^{\delta,0}(0) = w_+^*, \quad (w_+^{\delta,0})'(0) = w_+^{**} \quad \text{dans } \Omega_+ \end{cases} \quad (8)$$

où  $N_+(u_+^{\delta,0}, w_+^{\delta,0}, \varphi, \psi) = \int_{\Omega_+} \{C[\epsilon(u_+^{\delta,0}) + f(\nabla w_+^{\delta,0})] \cdot \epsilon(\varphi) + C[\epsilon(w_+^{\delta,0}) + f(\nabla u_+^{\delta,0})] \nabla w_+^{\delta,0} \cdot \nabla \psi\} d\Omega_+$ .

Le problème (8) vérifié par le premier terme du développement asymptotique correspond au problème de von Kármán posé sur le domaine  $\Omega_+$ . Il admet une unique solution vérifiant  $w_+^{\delta,0} \in L^\infty(0, T; W^\delta(\Omega_+))$ ,  $(w_+^{\delta,0})' \in L^\infty(0, T; V^\delta(\Omega_+))$ ,  $u_+^{\delta,0} \in L^\infty(0, T; U^\delta(\Omega_+))$  et  $(u_+^{\delta,0})' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega_+)]^2)$ , que l'on peut obtenir en utilisant la méthode de Galerkin (voir [7]). Les conditions obtenues ici sont en fait naturelles, elles consistent à enlever tout simplement la couche mince. Elles sont toutefois inintéressantes puisqu'elles ne prennent pas en compte l'effet de la couche. Elles ne sont satisfaisantes que lorsque l'épaisseur de la couche devient presque nulle. Il nous faut donc aller plus loin dans notre développement pour aboutir à des conditions d'ordres supérieurs et approximer ainsi l'effet de la couche mince.

On considère les espaces variationnels

$$W(\Omega_+) = \left\{ w \in H^2(\Omega_+); w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = 0; w|_\Sigma \in H^2(\Sigma), \frac{\partial w}{\partial \nu} \in H^1(\Sigma) \right\},$$

$$V(\Omega_+) = \{ w \in H^1(\Omega_+); w|_\Gamma = 0; w|_\Sigma \in H^1(\Sigma) \},$$

$$U(\Omega_+) = \{ u \in (H^1(\Omega_+))^2; u|_\Gamma = 0, u_\tau \in H^1(\Sigma) \}$$

et pour tout  $(\varphi, \psi) \in U(\Omega_+) \times W(\Omega_+)$ , on note

$$\gamma_T(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \quad \gamma_S(\psi) = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - R(s) \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad N_T(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial s} - R(s) \varphi_\nu + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2.$$

**Théorème 3.2.** *Le terme  $(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1})$  résout le problème*

$$\begin{cases} \rho_+ [((u_+^{\delta,1})', \varphi)_{\Omega_+}]' + \rho_+ [((w_+^{\delta,1})'_+, \psi)_{\Omega_+}]' + \rho_+ [b_+((w_+^{\delta,1})', \psi)]' \\ + a_+(w_+^{\delta,1}, \psi) + N_+(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1}, \varphi, \psi) + \delta \{ \rho_- [((u_+^{\delta,1})', \varphi)_\Sigma]' + \rho_- [((w_+^{\delta,1})'_+, \psi)_\Sigma]' \\ + \rho_- [b_\Sigma((w_+^{\delta,1})', \psi)]' + a_\Sigma(w_+^{\delta,1}, \psi) + N_\Sigma(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1}, \varphi, \psi) \} = O(\delta^2), \end{cases} \quad (9)$$

$\forall (\varphi, \psi) \in U(\Omega_+) \times W(\Omega_+)$ , avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_+^{\delta,1}(0) &= u_+^*, & (u_+^{\delta,1})'(0) &= u_+^{**}, & w_+^{\delta,1}(0) &= w_+^*, & (w_+^{\delta,1})'(0) &= w_+^{**} & \text{dans } \Omega_+ \\ w_+^{\delta,1}(0) &= w_{+\Sigma}^*, & (w_+^{\delta,1})'(0) &= w_{+\Sigma}^{**}, & (u_+^{\delta,1})'(0) &= u_{+\Sigma}^*, & (u_+^{\delta,1})'(0) &= u_{+\Sigma}^{**}, \\ \left( \frac{\partial w_+^{\delta,1}}{\partial \nu} \right)'(0) &= w_+^{***} & \text{sur } \Sigma \end{aligned} \quad (10)$$

où  $b_\Sigma(w_+^{\delta,1}, \psi) = \int_\Sigma \left( \frac{\partial w_+^{\delta,1}}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial w_+^{\delta,1}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) ds$ ,  $a_\Sigma(w_+^{\delta,1}, \psi) = \int_\Sigma E_- (\gamma_T(w_+^{\delta,1}) \gamma_T(\psi) + \frac{2}{(1+\mu_-)} \gamma_S(w_+^{\delta,1}) \gamma_S(\psi)) ds$ ,  
 $N_\Sigma(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1}, \varphi, \psi) = E_- \int_\Sigma N_T(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1}) \left( \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial s} - R(s) \varphi_\nu + \frac{\partial w_+^{\delta,1}}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds$ .

Le problème résolu par  $(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1})$  suggère l'idée de négliger les termes en  $O(\delta^2)$  et de définir ainsi un problème approché en annulant le second membre de l'équation (9). On peut montrer grâce à la méthode de Faedo-Galerkin que le problème ainsi obtenu admet au moins une solution  $(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)$  vérifiant  $\tilde{w}_+ \in L^\infty(0, T; W(\Omega_+))$ ,  $(\tilde{w}_+)' \in L^\infty(0, T; V(\Omega_+))$ ,  $(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu})' \in L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$  et  $\tilde{u}_+ \in L^\infty(0, T; U(\Omega_+))$ ,  $(\tilde{u}_+)' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega_+)]^2)$ . La formulation forte de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_+(\tilde{u}_+)' - \operatorname{div} \{ C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)] \} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T), \\ \rho_+[I - \Delta] \tilde{w}_+ + D_+ \Delta^2 \tilde{w}_+ - \operatorname{div} \{ C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)] \nabla \tilde{w}_+ \} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T) \end{aligned} \quad (11)$$

avec les conditions d'encastrement sur  $\Gamma$

$$\tilde{u}_+ = 0, \quad \tilde{w}_+ = \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (12)$$

et les conditions de Ventcel sur  $\Sigma \times (0, T)$

$${}^t \tau (C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]) \nu = \delta \left( -\rho_- (\tilde{u}_\tau)''_+ + E_- \frac{\partial}{\partial s} [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)] \right), \quad (13)$$

$${}^t \nu (C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]) \nu = \delta \left( -\rho_- (\tilde{u}_\nu)''_+ + E_- R(s) N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \right), \quad (14)$$

$$D_+ [\Delta \tilde{w}_+ + (1 - \mu) B_1 \tilde{w}_+] = -\delta \left( Q(\tilde{w}_+) + \rho_- \frac{\partial \tilde{w}_+''}{\partial \nu} \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D_+ \left[ \frac{\partial \Delta \tilde{w}_+}{\partial \nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2 \tilde{w}_+}{\partial s} \right] - \rho_+ \frac{\partial \tilde{w}_+''}{\partial \nu} - C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)] \nu \cdot \nabla \tilde{w}_+ \\ = \delta \left( \rho_- \left[ \tilde{w}_+ - \frac{\partial^2 \tilde{w}_+}{\partial s^2} \right]'' + P(\tilde{w}_+) - E_- \frac{\partial}{\partial s} \left[ N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \right] \right) \end{aligned} \quad (16)$$

où  ${}^t v$  ( resp.  ${}^t \tau$  ) est le vecteur transposé ( resp. matrice ) de  $v$  ( resp.  $\tau$  ). Les opérateurs de trace  $P$  et  $Q$  sont définis par :

$$P(\tilde{w}) = E_- \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma_T(\tilde{w}) + \frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} (R(s) \gamma_S(\tilde{w})) \right]; \quad Q(\tilde{w}) = E_- \left[ \frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} \gamma_S(\tilde{w}) - R(s) \gamma_T(\tilde{w}) \right].$$

On associe avec (11) les conditions initiales (10).

Les conditions aux limites approchées de Ventcel (13)–(16) ne sont pas classiques car elles font intervenir des dérivées tangentielles du même ordre que celui de l'opérateur intérieur. Comme cela a été signalé dans l'introduction, ces conditions ont déjà été obtenues par l'auteur dans [9]. Cependant, dans notre cas elles sont dépendantes de  $\delta$ . Ceci provient du fait que les coefficients de l'élasticité du matériau constituant la couche mince sont du même ordre que celui de la plaque, contrairement au cas traité dans [9] où les coefficients sont en  $\delta^{-1}$  dans le raidisseur. Donc, du moins formellement, quand  $\delta$  tend vers zéro, la couche mince doit disparaître.

Une question particulièrement importante serait d'estimer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée  $(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)$ . Cette question reste cependant délicate et par conséquent ouverte et ce en raison de la complexité du modèle de von Kármán et du fait qu'il soit non linéaire.

## Références

- [1] H. Ammari, C. Latiri-Grouz, Approximate boundary conditions for thin periodic coatings, in: *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation* (Golden, CO, 1998), SIAM, Philadelphia, PA, 1998, pp. 297–301.
- [2] A. Bendali, K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, *SIAM J. Appl. Math.* 56 (6) (1996) 1664–1693.
- [3] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, vol. II: Theory of Plates*, North-Holland, 1997.
- [4] B. Engquist, J.-C. Nédélec, Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers, Rapport interne 278, CMAP, école polytechnique, Palaiseau, France, 1993.
- [5] H. Haddar, P. Joly, Effective boundary conditions for thin ferromagnetic coatings. Asymptotic analysis of the 1D model, *Asymptotic Anal.* 27 (2) (2001) 127–160.
- [6] J.E. Lagnese, J.L. Lions, *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*, Masson, Paris, 1988.
- [7] I. Lasiesca, Uniform stabilisability of a full von Kármán system with nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control* 36 (1998).
- [8] K. Lemrabet, Etude de divers problèmes aux limites de ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.T.H.B, 1987.
- [9] L. Rahmani, Ventcel's boundary conditions for a dynamic nonlinear plate, *Asymptotic Anal.* 38 (2004) 319–337.