

Équations aux dérivées partielles/Problèmes mathématiques de la mécanique

Régularité conditionnelle des équations de Navier–Stokes

Igor Kukavica, Mohammed Ziane

Department of Mathematics, University of Southern California, Los Angeles, California, États-Unis

Reçu le 5 décembre 2005 ; accepté le 21 avril 2006

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Dans cette Note, nous donnons des conditions suffisantes de régularité des solutions des équations de Navier–Stokes. Nous montrons que si une solution de Leray–Hopf vérifie l’une des trois conditions (i) $\partial u/\partial x_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 2$ et $9/4 \leq r_0 \leq 3$, (ii) $\nabla u_3 \in L_t^{s_1} L_x^{r_1}$ où $2/s_1 + 3/r_1 \leq 11/6$ et $54/23 \leq r_0 \leq 18/5$, ou (iii) $u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 5/8$ et $24/5 \leq r_0 \leq \infty$, alors elle est régulière. Ces conditions améliorent les résultats existants sur la régularité conditionnelle des équations de Navier–Stokes. *Pour citer cet article : I. Kukavica, M. Ziane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Conditional regularity of the 3D Navier–Stokes equation. In this Note, we give sufficient conditions for the regularity of Leray–Hopf weak solutions to the Navier–Stokes equation. We prove that, if one of three conditions (i) $\partial u/\partial x_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ where $2/s_0 + 3/r_0 \leq 2$ and $9/4 \leq r_0 \leq 3$, (ii) $\nabla u_3 \in L_t^{s_1} L_x^{r_1}$ where $2/s_1 + 3/r_1 \leq 11/6$ and $54/23 \leq r_0 \leq 18/5$, or (iii) $u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ where $2/s_0 + 3/r_0 \leq 5/8$ and $24/5 \leq r_0 \leq \infty$, is satisfied, then the solution is regular. These conditions improve earlier results on the conditional regularity of the Navier–Stokes equations. *To cite this article : I. Kukavica, M. Ziane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this Note, we consider sufficient conditions for the regularity of the Cauchy problem of the three-dimensional Navier–Stokes equations. A classical result due to Leray gives the global existence of a weak solution when the initial datum is divergence free and is in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Moreover, if the initial datum is more regular, say in $H^1(\mathbb{R}^3)$, then there exists a unique strong solution on a small interval of time $[0, T_{\max}]$ [5]. The problem of global existence of strong solution for large initial data is still open. There are, however, several sufficient conditions on the velocity which guarantee the global existence of strong solutions. A classical condition, due to Prodi, Serrin and Sohr, states that if a weak solution u belongs to the space $L_t^s L_x^r$, where $2/s + 3/r \leq 1$ with $3 < r < \infty$, then the solution u is smooth. A similar result obtained by Beirão da Veiga gives the regularity of the solution under the condition $\nabla u \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ where $2/s_0 + 3/r_0 \leq 2$ with $3/2 < r_0 \leq \infty$.

Adresses e-mail : kukavica@usc.edu (I. Kukavica), ziane@usc.edu (M. Ziane).

Recently, Neustupa and Penel proved that the boundedness of one component of the velocity is sufficient for the regularity of the solution. Since then, there have been many results in which the requirement on one component ∇u_3 or on one directional derivative $\partial u/\partial x_3$ guarantees the regularity of the solution. The sharpest known results are established in [7] and [9] (see also [6]). By [7,9], if $\nabla u_3 \in L_t^{s_1} L_x^{r_1}$ where $2/s_1 + 3/r_1 \leq 3/2$ with $2 \leq r_0 \leq \infty$, then the solution is regular. Also, by [7], if $u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ where $2/s_0 + 3/r_0 \leq 1/2$ and $6 < r_0 \leq \infty$, then the solution is regular. In this Note, we improve on these and other known one-component results. We prove:

Theorem 0.1. *If u is a weak solution satisfying one of the three conditions: (i) $\partial u/\partial x_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ where $2/s_0 + 3/r_0 \leq 2$ and $9/4 \leq r_0 \leq 3$, (ii) $\nabla u_3 \in L_t^{s_1} L_x^{r_1}$ where $2/s_1 + 3/r_1 \leq 11/6$ and $54/23 \leq r_0 \leq 18/5$, or (iii) $u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ where $2/s_0 + 3/r_0 \leq 5/8$ and $24/5 \leq r_0 \leq \infty$, then the solution is regular.*

Proof. We will give a sketch of the proof, and refer the reader to the manuscripts [3,4]. Fix an arbitrary $T' \in (0, \infty)$ such that $T' \leq T_{\max}$, where T_{\max} is the maximal time of existence. We claim that a solution cannot become singular at T' , which clearly implies $T_{\max} = \infty$. By decreasing s_0 if necessary, we may assume that $2/s_0 + 3/r_0 = 2$. Now find $t_1 \in (0, T')$ such that $\|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}(\mathbb{R}^3 \times (t_1, T'))} \leq \epsilon$, where ϵ is a sufficiently small constant. The proof now relies on coupled estimates on $J = (\sum_{k=1}^2 \|\nabla u_k\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 + \sum_{k=1}^2 \|\Delta u_k\|_{L_t^2 L_x^2}^2)^{1/2}$ and $K = (\|u_3^3\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\nabla(u_3^3)\|_{L_t^2 L_x^2})^{1/3}$. First, for $k = 1, 2$, we multiply the first two components of the Navier–Stokes equations (NSE) $_k$ with $-\Delta u_k$ and integrate. Then we use the identity (3) and the Gagliardo–Nirenberg inequality (4) and obtain

$$J^2 \leq C\epsilon J^2 + C\epsilon^2 \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}}^2 + C \sum_{k=1}^2 \int |\nabla u_k|^2|_{t_1}. \quad (1)$$

In order to estimate K , we multiply the third component of the Navier–Stokes equations with u_3^5 , and estimate the pressure term using the Calderón–Zygmund Theorem. We obtain

$$K^6 \leq C \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} J^2 K^{12/3} + C \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} K^6 + C \int u_3^6|_{t_1}.$$

Therefore, if ϵ is small enough, we have $J + K \leq C(\sum_{k=1}^2 \int |\nabla u_k|^2|_{t_1})^{1/2} + C(\int u_3^6|_{t_1})^{1/6} = M$, which implies $\|u\|_{L_t^{10} L_x^{10}(\mathbb{R}^3 \times (t_1, T'))} \leq CM$. Hence, the solution cannot develop a singularity at T' .

The proof of (ii) and (iii) is more involved and we refer the reader to the French version as well as to the manuscript [4]. \square

1. Introduction

Dans cette Note, nous considérons des conditions suffisantes de régularité des solutions du problème de Cauchy associé aux équations de Navier–Stokes en trois dimensions. Un résultat classique de Leray donne l'existence globale des solutions faibles quand la condition initiale u_0 , qui est à divergence nulle, appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)$. De plus, si la condition initiale est plus régulière, disons dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, alors il existe une unique solution forte (donc régulière) sur un petit intervalle de temps $[0, T_{\max})$ (voir [5]). Le problème d'existence globale de solutions fortes pour des données initiales grandes dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ reste encore ouvert. Ceci étant dit, il existe plusieurs conditions suffisantes sur la vitesse qui garantissent l'existence globale de solutions fortes. Une condition classique donnée par Prodi, Serrin et Sohr (voir [10,11]) affirme que si une solution faible u appartient à $L_t^s L_x^r$ localement, où $2/s + 3/r \leq 1$ avec $3 < r \leq \infty$, alors la solution u est régulière. Un résultat similaire montré par Beirão da Veiga donne la régularité de la solution sous l'hypothèse $\nabla u \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ localement, où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 2$ avec $3/2 < r_0 \leq \infty$ (voir [1]).

Récemment, Neustupa et Penel ont montré que l'hypothèse qu'une composante de la vitesse soit bornée est suffisante pour la régularité de la solution [6]. Ce résultat a donné suite à d'autres résultats donnant des conditions suffisantes pour la régularité qui portent sur une composante u_3 ou sur une dérivée $\partial u/\partial x_3$ qui garantissent la régularité des solutions faibles [2,6–9,12,13]. Par exemple, dans [7] et [9] la condition $\nabla u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ sur un intervalle de temps avec $2/s_0 + 3/r_0 \leq 3/2$ et $2 \leq r_0 \leq \infty$ implique la régularité. Aussi, Penel et Pokorný ont montré que $\partial u/\partial x_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 3/2$ and $2 \leq r_0 \leq \infty$ implique la régularité (voir [8, Theorem 4]). Une deuxième résultat dans [8] donne la régularité de la solution sous la condition $u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 1/2$ et $6 < r_0 \leq \infty$. Dans cette Note, nous améliorons ces résultats en obtenant :

Théorème 1.1. *Supposons qu'une solution faible u , définie sur un intervalle ouvert I , vérifie une des trois conditions suivantes :*

- (i) $\partial_3 u \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}(\mathbb{R}^3 \times I) = L^{s_0}(I, L^{r_0}(\mathbb{R}^3))$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 2$ et $9/4 \leq r_0 \leq 3$;
- (ii) $\nabla u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}(\mathbb{R}^3 \times I) = L^{s_0}(I, L^{r_0}(\mathbb{R}^3))$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 11/6$ et $54/23 \leq r_0 \leq 18/5$;
- (iii) $u_3 \in L_t^{s_0} L_x^{r_0}(\mathbb{R}^3 \times I) = L^{s_0}(I, L^{r_0}(\mathbb{R}^3))$ où $2/s_0 + 3/r_0 \leq 5/8$ et $24/5 \leq r_0 \leq \infty$.

Alors la solution u est régulière sur I .

On note que le théorème ci-dessus s'applique aussi au cas de conditions aux limites périodiques, avec la même démonstration.

Preuve du Théorème. On fixe $T' \in (0, \infty)$ tel que $T' \leq T_{\max}$, où T_{\max} est le temps maximal d'existence, et nous démontrons que la solution ne peut pas développer de singularité au moment T' . Il est facile de voir que nous pouvons nous limiter au cas où $2/s_0 + 3/r_0 = 2$. Soit $t_1 \in (0, T')$ tel que $\|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}(\mathbb{R}^3 \times (t_1, T'))} \leq \epsilon$ où ϵ est une petite constante. On fixe alors $t_2 \in (t_1, T')$, et on travaille sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On utilisera la notation $\|\cdot\|_{L_t^s L_x^r} = \|\cdot\|_{L_t^s L_x^r(\mathbb{R}^3 \times (t_1, t_2))}$. Nous écrivons l'équation de Navier–Stokes en composantes sous la forme

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k + \sum_{j=1}^3 u_j \partial_j u_k + \partial_k p = 0, \quad k = 1, 2, 3 \tag{NSE_k}$$

avec $\sum_{j=1}^3 \partial_j u_j = 0$.

Étape 1. *Estimations a priori de $J = (\sum_{i=1}^2 \|\nabla u_i\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\Delta u_i\|_{L_t^2 L_x^2}^2)^{1/2}$.* Pour $k = 1, 2$, nous multiplions l'équation (NSE_k) par $-\Delta u_k$, et nous obtenons après intégration

$$\sum_{k=1}^2 \left(\iint \frac{\partial u_k}{\partial t} (-\Delta u_k) + \iint \Delta u_k \Delta u_k \right) = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 \iint u_j \partial_j u_k \Delta u_k + \iint \partial_k p \Delta u_k \right) = \sum_{m=1}^4 I_m \tag{2}$$

où les termes I_m sont donnés par

$$I_1 = \sum_{j,k=1}^2 \iint u_j \partial_j u_k \Delta_2 u_k, \quad I_2 = \sum_{j,k=1}^2 \iint u_j \partial_j u_k \partial_3 u_k,$$

$$I_3 = \sum_{k=1}^2 \iint u_3 \partial_3 u_k \Delta u_k, \quad \text{et} \quad I_4 = \sum_{k=1}^2 \iint \partial_k p \Delta u_k.$$

L'opérateur $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ est le Laplacien bidimensionnel. Notons que, par intégration par parties et par des manipulations algébriques, nous pouvons facilement montrer que, si $u = (u_1, u_2, u_3) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ est à divergence nulle, alors

$$\sum_{j,k=1}^2 \int u_j \partial_j u_k \Delta_2 u_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \int \partial_j u_k \partial_j u_k \partial_3 u_3 - \int \partial_1 u_1 \partial_2 u_2 \partial_3 u_3 + \int \partial_1 u_2 \partial_2 u_1 \partial_3 u_3. \tag{3}$$

De plus rappelons l'inégalité suivante, qui est un corollaire de l'inégalité classique de Gagliardo–Nirenberg :

$$\|v\|_{L_t^s L_x^r} \leq C \|v\|_{L_t^\infty L_x^2}^{(6-r)/2r} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^{3(r-2)/2r} \quad \text{pour } r, s \text{ tels que } \frac{2}{s} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2} \text{ et } 2 \leq r \leq 6. \tag{4}$$

En utilisant l'identité (3) et l'inégalité (4), nous obtenons facilement $|I_1| \leq C \|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} J^2$ pour $9/4 \leq r_0 \leq 3$. Le terme I_2 se traite d'une façon similaire, après une intégration par parties. On obtient $|I_2| \leq C \|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} J^2$. Pour estimer I_3 , soient r_2 et s_2 tel que $1/s_2 + 1/s_0 = 1/2$ et $1/r_2 + 1/r_0 = 1/2$. On note que $6 \leq r_2 \leq 18$ et $6 \leq s_2 \leq \infty$, et donc

$$|I_3| \leq \sum_{k=1}^2 \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}} \|\partial_3 u_k\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} \|\Delta u_k\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \|\Delta u_k\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + C \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}}^2 \|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}}^2. \quad (5)$$

Le premier terme dans le second membre de l'inégalité ci-dessus peut être absorbé dans J^2 , alors que l'estimation du terme $\|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}}^2$ en fonction de J^2 sera faite plus bas. Nous nous consacrons maintenant au traitement du terme I_4 . D'abord, par intégration par parties et du fait que

$$\Delta p = - \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_j \partial_j u_i = - \sum_{i,j=1}^2 \partial_i u_j \partial_j u_i - 2 \sum_{i=1}^2 \partial_3 u_i \partial_i u_3 - \partial_3 u_3 \partial_3 u_3$$

nous écrivons I_4 sous la forme

$$I_4 = - \sum_{i,j=1}^2 \iint \partial_i u_j \partial_j u_i \partial_3 u_3 - 2 \sum_{i=1}^2 \iint \partial_3 u_i \partial_i u_3 \partial_3 u_3 - \iint \partial_3 u_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)^2 = \sum_{m=1}^3 I_4^{(m)}. \quad (6)$$

Il est facile de voir que pour le premier et troisième termes $I_4^{(1)}, I_4^{(3)}$, nous avons

$$|I_4^{(1)}| + |I_4^{(3)}| \leq C \sum_{i=1}^2 \|\nabla u_i\|_{L_t^{s_1} L_x^{r_1}}^2 \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} \leq C \|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} J^2.$$

Pour le second terme, nous obtenons après une intégration par parties

$$|I_4^{(2)}| \leq 2 \sum_{i=1}^2 \|\partial_i u_3\|_{L_t^2 L_x^2} \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}} \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} + 2 \sum_{i,j=1}^2 \|\partial_3 u_i\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}} \|\partial_{ij} u_j\|_{L_t^2 L_x^2}$$

et, en utilisant l'inégalité classique $\|\partial_{ij} u_k\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \|\Delta u_k\|_{L_t^2 L_x^2}$ où $i, j = 1, 2, 3$ et $k = 1, 2$, nous obtenons

$$|I_4| \leq C \|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} J^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \|\Delta u_k\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + C \|\partial_3 u\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}}^2 \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}}^2. \quad (7)$$

Les estimations ci-dessus sur I_1, I_2, I_3 et I_4 donnent

$$J^2 \leq C \epsilon J^2 + C \epsilon^2 \|u_3\|_{L_t^{s_2} L_x^{r_2}}^2 + C \sum_{k=1}^2 \int |\nabla u_k|^2|_{t_1}. \quad (8)$$

Étape 2. Estimation de $K = (\|u_3^3\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\nabla(u_3^3)\|_{L_t^2 L_x^2})^{1/3}$. Nous multiplions (NSE₃) par u_3^5 et nous intégrons pour obtenir

$$\frac{1}{6} \iint \partial_t (u_3^6) + \frac{5}{9} \sum_{j=1}^3 \iint \partial_j (u_3^3) \partial_j (u_3^3) = 5 \iint p u_3^4 \partial_3 u_3 = I_0 \leq \|p\|_{L_t^{2s_3} L_x^{2r_3}} \|u_3^4\|_{L_t^{s_3} L_x^{r_3}} \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}}$$

où $3/2s_3 + 1/s_0 = 1$ et $3/2r_3 + 1/r_0 = 1$. L'hypothèse $9/4 \leq r_0 \leq 3$ implique $9/4 \leq r_3 \leq 27/10$ et $9/4 \leq s_3 \leq 3$. Notons que par application du Théorème de Calderón–Zygmund, pour $t \in [t_1, t_2]$ on a $\|p\|_{L_x^{2r_3}} \leq C \|u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\|_{L_x^{2r_3}} \leq C \sum_{i=1}^2 \|u_i^2\|_{L_x^{2r_3}} + C \|u_3^2\|_{L_x^{2r_3}}$, et donc

$$|I_0| \leq C \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{L_t^{4s_3} L_x^{4r_3}}^2 \|u_3\|_{L_t^{4s_3} L_x^{4r_3}}^4 \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} + C \|u_3\|_{L_t^{4s_3} L_x^{4r_3}}^6 \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}}. \quad (9)$$

Pour $i = 1, 2$, l'inégalité de Sobolev donne $\|u_i\|_{L_t^{4s_3} L_x^{4r_3}}^2 \leq C \|\nabla u_i\|_{L_t^{4s_3} L_x^{r_4}}^2$ où $r_4 = 12r_3/(3 + 4r_3)$. Comme $2/4s_3 + 3/r_4 = 3/2$ et $9/4 \leq r_4 \leq 54/23$, nous avons $\|u_i\|_{L_t^{4s_3} L_x^{4r_3}}^2 \leq C \|\nabla u_i\|_{L_t^{4s_3} L_x^{r_4}}^2 \leq C J^2$, pour $i = 1, 2$. De plus, comme $2/(4s_3/3) + 3/(4r_3/3) = 3/2$ avec $3 \leq 4r_3/3 \leq 18/5$, nous avons $\|u_3\|_{L_t^{4s_3} L_x^{4r_3}}^6 = \|u_3^3\|_{L_t^{4s_3/3} L_x^{4r_3/3}}^2 \leq C K^6$, et alors

$$K^6 \leq C \|\partial_3 u_3\|_{L_t^s L_x^{r_0}} J^2 K^4 + C \|\partial_3 u_3\|_{L_t^{s_0} L_x^{r_0}} K^6 + C \int u_3^6|_{t_1}.$$

Nous concluons que

$$J \leq C\epsilon^{1/2} J + C\epsilon K + C \left(\sum_{k=1}^2 \int |\nabla u_k|^2|_{t_1} \right)^{1/2},$$

$$K \leq C\epsilon^{1/6} J^{1/3} K^{2/3} + C\epsilon^{1/6} K + C \left(\int u_3^6|_{t_1} \right)^{1/6}.$$

Pour ϵ assez petit, nous avons

$$J + K \leq C \left(\sum_{k=1}^2 \int |\nabla u_k|^2|_{t_1} \right)^{1/2} + C \left(\int u_3^6|_{t_1} \right)^{1/6} = M$$

ce qui implique $\|u\|_{L_t^{10} L_x^{10}(\mathbb{R}^3 \times (t_1, T'))} \leq CM$ et donc la solution ne peut pas devenir singulière au moment T' . Pour plus de détails voir [3].

Démonstration de (ii). On donne ici une esquisse de la démonstration, pour les détails (voir [4]). Nous posons $E = \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}$, et nous multiplions $(NSE)_k$ par $-\Delta_2 u_k$, pour obtenir par des intégrations par parties et par l'utilisation de l'identité (3) et l'inégalité (4)

$$J^2 \leq C(T' - t_1)^{1/12} \epsilon J^2 + C\epsilon E^{1/6} J K^{5/6} + C \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int \partial_j u_k \partial_j u_k|_{t_1} \tag{10}$$

où

$$J = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^2 \|\partial_j u_k\|_{L_t^\infty L_x^2} + \sum_{i,k=1}^3 \sum_{j=1}^2 \|\partial_{ij} u_k\|_{L_t^2 L_x^2} \quad \text{et} \quad K^3 = \sum_{k=1}^2 \|u_k^3\|_{L_t^\infty L_x^2} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \|\partial_j (u_k^3)\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

Pour $k = 1, 2$, nous multiplions $(NSE)_k$ par u_k^5 , et nous décomposons la pression comme suit : $p = p_1 + p_2 + p_3$, avec $-\Delta p_1 = \sum_{i,j=1}^2 \partial_i u_j \partial_j u_i$, $-\Delta p_2 = 2 \sum_{i=1}^2 \partial_i u_3 \partial_3 u_i$, et $-\Delta p_3 = -\partial_3 u_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)$.

Nous avons alors $\|p_1\|_{L_t^6 L_x^{9/2}} \leq CJ^2$, et $\|p_2\|_{L_t^{s_6} L_x^{r_6}} \leq C\epsilon L$ avec $s_6 = s_5 = s_0$ et $r_6 = 3r_5/(3 - 2r_5)$, où $L = \|\partial_3 u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\nabla \partial_3 u\|_{L_t^2 L_x^2}$. Le terme p_3 s'estime d'une façon similaire. En conclusion, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$K^6 \leq CE^{1/2} J^3 K^{7/2} + C\epsilon E^{1/6} J K^{23/6} L + C\epsilon E^{1/6} J^2 K^{23/6} + C \sum_{k=1}^2 \int u_k^6|_{t_1}. \tag{11}$$

Reste à estimer le terme L . Nous multiplions l'équation $(NSE)_k$ avec $-\partial_3 u_k$ pour $k = 1, 2, 3$ et on obtient

$$L^2 \leq CE^{1/2} J K^{1/2} L + C(T' - t_1)^{1/12} \epsilon L^2 + C \sum_{k=1}^3 \int \partial_3 u_k \partial_3 u_k|_{t_1}. \tag{12}$$

Nous concluons alors, en utilisant le fait que ϵ est petit.

Démonstration de (iii). On donne ici une esquisse de la démonstration seulement, pour les détails voir [4]. La preuve repose sur des estimations couplées comme ci-dessus des termes J , K et L . Pour l'estimation du terme J on le décompose en la somme de quatre termes $J_1 = \sum_{j,k=1}^2 \iint u_j \partial_j u_k \Delta_2 u_k$, $J_2 = \sum_{j=1}^3 \iint u_j \partial_j u_3 \Delta_2 u_3$, $J_3 = \sum_{k=1}^2 \iint u_3 \partial_3 u_k \Delta_2 u_k$ et $J_4 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int \partial_j u_k \partial_j u_k|_{t_1}$. L'estimation de J_1 et J_2 ne pose pas de problèmes et on obtient $J_1 + J_2 \leq C\epsilon E^{3/8} J^{13/8}$. Pour J_3 on obtient $J_3 \leq C\epsilon J E^{3/8} L^{5/8}$. Reste à estimer les termes K et L . Pour le terme K on décompose la pression en la somme de cinq termes $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$, où $-\Delta p_1 = \sum_{i,j=1}^2 \partial_i u_j \partial_j u_i$, $-\Delta p_2 = 2 \sum_{i=1}^2 \partial_i (u_3 \partial_3 u_i)$, $-\Delta p_3 = -2 \sum_{i=1}^2 u_3 \partial_3 u_i$, $-\Delta p_4 = -\partial_3 (u_3 \partial_1 u_1) - \partial_3 (u_3 \partial_2 u_2)$ et

$-\Delta p_5 = u_3 \partial_{31} u_1 + u_3 \partial_{32} u_2$ et on utilise les estimations classiques du potentiel Newtonien et l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg. On trouve alors

$$K^6 \leq CE^{1/2} J^3 K^{7/2} + C\epsilon E^{3/8} JK^{29/8} L + C(T' - t_1)^{3/16} \epsilon JK^5 + C \sum_{k=1}^2 \int u_k^6|_{t_1}. \quad (13)$$

Enfin, on estime le terme L et on obtient

$$L^2 \leq CE^{1/2} JK^{1/2} L + C\epsilon E^{3/8} L^{13/8} + C \sum_{k=1}^3 \int \partial_3 u_k \partial_3 u_k|_{t_1}. \quad (14)$$

La combinaison des estimations de J , K et L implique que la solution ne peut pas exploser en temps fini comme dans la démonstration de (i) et (ii) (voir [4]). \square

Remerciements

Igor Kukavica et Mohammed Ziane ont bénéficié pour mener ces travaux d'un soutien partiel des bourses DMS-0306586 et DMS-0505974, respectivement, de la National Science Foundation des Etats Unies d'Amérique.

Références

- [1] H. Beirão da Veiga, Concerning the regularity problem for the solutions of the Navier–Stokes equations, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 321 (1995) 405–408.
- [2] C. He, Regularity for solutions to the Navier–Stokes equations with one velocity component regular, Electron. J. Differential Equations 49 (29) (2002) 1–13.
- [3] I. Kukavica, M. Ziane, The Navier–Stokes equation with regularity in one direction (2005), submitted for publication.
- [4] I. Kukavica, M. Ziane, One component regularity for the Navier–Stokes equations, Nonlinearity 19 (2) (2006) 453–469.
- [5] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934) 193–248.
- [6] J. Neustupa, P. Penel, Regularity of a suitable weak solution to the Navier–Stokes equations as a consequence of regularity of one velocity component, in: Applied Nonlinear Analysis, Kluwer/Plenum, New York, 1999, pp. 391–402.
- [7] J. Neustupa, A. Novotný, P. Penel, An interior regularity of a weak solution to the Navier–Stokes equations in dependence on one component of velocity, in: Topics in Mathematical Fluid Mechanics, Quad. Mat., vol. 10, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2002, pp. 163–183.
- [8] P. Penel, M. Pokorný, Some new regularity criteria for the Navier–Stokes equations containing gradient of the velocity, Appl. Math. 49 (2004) 483–493.
- [9] M. Pokorný, On the result of He concerning the smoothness of solutions to the Navier–Stokes equations, Electron. J. Differential Equations 10 (11) (2003) 1–8.
- [10] J. Serrin, On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal. 9 (1962) 187–195.
- [11] J. Serrin, The initial value problem for the Navier–Stokes equations, in: Nonlinear Problems Proc. Sympos., Madison, WI, Univ. of Wisconsin Press, Madison, WI, 1963, pp. 69–98.
- [12] Z. Skalák, P. Kučera, A note on coupling of velocity components in the Navier–Stokes equations, Z. Angew. Math. Mech. 84 (2004) 124–127.
- [13] Y. Zhou, A new regularity criterion for the Navier–Stokes equations in terms of the gradient of one velocity component, Methods Appl. Anal. 9 (2002) 563–578.