

Probabilités

Un principe de grandes déviations pour une équation différentielle stochastique progressive rétrograde

Sophie Rainero

CEREMADE, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

Reçu le 6 avril 2006 ; accepté après révision le 22 mai 2006

Disponible sur Internet le 27 juin 2006

Présenté par Marc Yor

Résumé

On montre la convergence et un principe de grandes déviations pour une équation différentielle stochastique rétrograde associée à une famille de processus de Markov dont le coefficient de diffusion tend vers 0. **Pour citer cet article :** S. Rainero, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Large deviations of a forward backward stochastic differential equation. We prove the convergence and a large deviation principle for a Backward Stochastic Differential Equation, related to a family of Markov processes, the diffusion coefficient of which tends to 0. **To cite this article:** S. Rainero, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction, notations et hypothèses

Nous nous intéressons dans cette Note à un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPR) de la forme suivante :

$$X_t^{\varepsilon, s, x} = x + \int_s^t \beta(X_r^{\varepsilon, s, x}) dr + \varepsilon \int_s^t \sigma(X_r^{\varepsilon, s, x}) dB_r, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (1)$$

$$Y_t^{\varepsilon, s, x} = g(X_T^{\varepsilon, s, x}) + \int_t^T f(r, X_r^{\varepsilon, s, x}, Y_r^{\varepsilon, s, x}, Z_r^{\varepsilon, s, x}) dr - \int_t^T Z_r^{\varepsilon, s, x} dB_r, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (2)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel et les coefficients β , σ , g et f sont suffisamment réguliers. On sait, grâce aux travaux de Freidlin et Wentzell, que la solution de l'équation directe converge en probabilité, quand ε tend vers 0, vers la solution $\varphi^{s, x}$ de l'équation déterministe

Adresse e-mail : rainero@ceremade.dauphine.fr (S. Rainero).

$$\varphi'_t = \beta(\varphi_t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \varphi_s = x \tag{3}$$

en vérifiant un principe de grandes déviations (PGD). Nous montrons ici que la solution $(Y^{\varepsilon,s,x}, Z^{\varepsilon,s,x})$ de l'équation rétrograde converge, quand ε tend vers 0, vers $(\psi^{s,x}, 0)$, où $\psi^{s,x}$ est la solution de l'équation déterministe :

$$\psi'_t = -f(t, \varphi_t^{s,x}, \psi_t, 0), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \psi_T = g(\varphi_T^{s,x}) \tag{4}$$

et que la loi induite par $Y^{\varepsilon,s,x}$ vérifie un principe de grandes déviations.

Soit $T > 0$. Sur l'intervalle de temps $[0, T]$, on considère un mouvement brownien en dimension d , $(B_t)_{t \in [0, T]}$, défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ la filtration engendrée par le brownien et complétée. Dans tout ce qui suit, $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ sont des fonctions lipschitziennes. $f : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(t, x, y, z) \mapsto f(t, x, y, z)$, est continue en t , uniformément lipschitzienne par rapport à x, y, z , et $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ est lipschitzienne. Nous poserons généralement $s = 0$, pour simplifier l'écriture, mais, bien entendu, les résultats énoncés restent vrais pour tout $s \in [0, T]$. On notera $X^{\varepsilon,x} := X^{\varepsilon,0,x}$, $Y^{\varepsilon,x} := Y^{\varepsilon,0,x}$ et $Z^{\varepsilon,x} := Z^{\varepsilon,0,x}$, ainsi que $\varphi^x := \varphi^{0,x}$ et $\psi^x := \psi^{0,x}$. On adoptera la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Théorème 1.1 (Freidlin et Wentzell (cf. [2])). *La solution $(X_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0, T]}$ de (1) vérifie, quand ε tend vers 0, un principe de grandes déviations dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$ associé à la fonction de taux I_x définie par, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$:*

$$I_x(\varphi) := \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{v}_t|^2 dt, \quad v \in H^1([0, T], \mathbb{R}^d) : \varphi_t = x + \int_0^t \beta(\varphi_s) ds + \int_0^t \sigma(\varphi_s) \dot{v}_s ds, \quad \forall t \in [0, T] \right\}.$$

On rappelle que lorsque $a = \sigma \sigma^*$ est inversible, cette fonctionnelle s'écrit plus simplement sous la forme

$$I_x(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T Q_{\varphi_t}^* (\dot{\varphi}_t - \beta(\varphi_t)) dt \quad \text{si } \varphi \in H^1([0, T], \mathbb{R}^k) \quad \text{et } \varphi_0 = x, \quad I_x(\varphi) = +\infty \quad \text{sinon,}$$

où pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k, \quad Q_u^*(v) = \langle v, a^{-1}(u)v \rangle.$ (5)

2. Convergence et grandes déviations de la solution de l'équation rétrograde

Par unicité des solutions, la solution de l'EDSR :

$$Y_t = g(\varphi_T^{s,x}) + \int_t^T f(r, \varphi_r^{s,x}, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

est le couple déterministe $(\psi^{s,x}, 0)$ où $\psi^{s,x}$ est la solution de (4). L'équation (4) est donc la limite « naturelle » de l'EDSR (2), quand ε tend vers 0. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soient $\varepsilon \in]0, 1]$, $(s, x) \in [0, T] \times \mathcal{K}$, où \mathcal{K} est un compact de \mathbb{R}^k , et $(Y_t^{\varepsilon,s,x}, Z_t^{\varepsilon,s,x})_{t \in [s, T]}$, $(\psi_t^{s,x})_{t \in [s, T]}$ les solutions respectives des équations (2) et (4). Alors, il existe $C > 0$ indépendante de ε, s et x telle que : $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t \leq T} |Y_t^{\varepsilon,s,x} - \psi_t^{s,x}|^2 + \int_s^T \|Z_t^{\varepsilon,s,x}\|^2 dt] \leq C\varepsilon^2$.*

Démonstration. On regarde le couple $(\psi^{s,x}, 0)$ comme la solution d'une EDSR à coefficients déterministes, et on utilise les estimations sur les différences entre solutions d'EDSR dues à Pardoux (cf. par exemple [3]), et le caractère lipschitzien de f et g . Il existe une constante C_T , qui dépend essentiellement du temps terminal T , telle que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t \leq T} |Y_t^{\varepsilon,s,x} - \psi_t^{s,x}|^2 + \int_s^T \|Z_t^{\varepsilon,s,x}\|^2 dt \right] \leq C_T \mathbb{E}[|X_T^{\varepsilon,s,x} - \varphi_T^{s,x}|^2] + C_T \mathbb{E} \left[\int_s^T |X_t^{\varepsilon,s,x} - \varphi_t^{s,x}|^2 dt \right].$$

Il s'agit donc de majorer uniformément $|X_t^{\varepsilon,s,x} - \varphi_t^{s,x}|^2$, or, par un calcul classique, on obtient une inégalité de la forme suivante : $\mathbb{E}[\sup_{t \in [s, T]} |\varphi_t^{s,x} - X_t^{\varepsilon,s,x}|^2] \leq C\varepsilon^2$, où la constante C ne dépend pas de (s, ε, x) , pour x variant dans un compact et $\varepsilon \in]0, 1]$. \square

Nous allons maintenant montrer que la loi induite par $Y^{\varepsilon,s,x}$ satisfait un PGD. Rappelons les liens qui existent entre ce type d'EDSR et des équations aux dérivées partielles (EDP) semi-linéaires de type parabolique, et la représentation du couple $(Y^{\varepsilon,x}, Z^{\varepsilon,x})$ qui en résulte. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit le générateur infinitésimal de la diffusion $(X_t^{\varepsilon,s,x})_{t \geq s}$ par $\mathcal{L}^{\varepsilon,x} := \sum_{i=1}^k \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^k (\sigma \sigma^*)_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Pardoux a montré (cf. [3]) que si $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ est une solution classique du système d'EDP rétrogrades

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_t^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}^{\varepsilon,x} u_t^\varepsilon(t, x) + f_t(t, x, u^\varepsilon(t, x), (\nabla_x u^\varepsilon(t, x))^* \varepsilon \sigma(x)) &= 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k, \quad i \in \mathbb{N}_k, \\ u^\varepsilon(T, x) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^k, \end{aligned} \tag{6}$$

telle que $\|\nabla_x u^\varepsilon(t, x)\| \leq C(1 + |x|^q)$ pour des constantes $C, q > 0$, alors, pour tout (s, x) , $(u^\varepsilon(t, X_t^{\varepsilon,s,x}), \varepsilon(\nabla_x u^\varepsilon(t, X_t^{\varepsilon,s,x}))^* \sigma(X_t^{\varepsilon,s,x}))_{s \leq t \leq T}$ est la solution de l'EDSR (2). En particulier $u^\varepsilon(s, x) = Y_s^{\varepsilon,s,x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, tout $s \in [0, T]$. Réciproquement (cf. Pardoux, [3]), pour tout $\varepsilon \geq 0$, soit u^ε définie à partir de la solution de l'équation rétrograde comme

$$u^\varepsilon(s, x) := Y_s^{\varepsilon,s,x}, \quad s \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^k. \tag{7}$$

Alors u^ε est une fonction continue de s, x , solution de viscosité de (6), et on a $Y_t^{\varepsilon,s,x} = u^\varepsilon(t, X_t^{\varepsilon,s,x})$, $t \in [s, T]$.

Définition 2.2. Si $s \in [0, T]$, on définit des applications de $\mathcal{C}([s, T], \mathbb{R}^k)$ dans lui-même en posant

$$F^\varepsilon(\varphi) := [t \mapsto u^\varepsilon(t, \varphi_t)], \quad t \in [s, T], \quad \varphi \in \mathcal{C}([s, T], \mathbb{R}^k), \quad \text{où } u^\varepsilon \text{ est la fonction définie par (7).}$$

Ainsi $Y_t^{\varepsilon,s,x} = F^\varepsilon(X^{\varepsilon,s,x})(t)$, pour tout $t \in [s, T]$, donc $Y^{\varepsilon,s,x} = F^\varepsilon(X^{\varepsilon,s,x})$. Lorsque $\varepsilon = 0$, on notera simplement u et F au lieu de u^0 et F^0 . Cette représentation nous permet de déduire le PGD satisfait par la solution rétrograde de celui vérifié par la diffusion, via le principe de contraction (cf. Varadhan dans [5]) :

Théorème 2.3. $Y^{\varepsilon,x}$ satisfait dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$ un PGD associé à la fonction de taux I'_x définie par :

$$I'_x(\psi) = \inf \{ I_x(\varphi) : \varphi \in H^1([0, T], \mathbb{R}^k) \mid \psi = F(\varphi) \}, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k).$$

Démonstration. Pour appliquer le principe de contraction, il suffit de montrer que les F^ε , $\varepsilon \geq 0$, sont continues et que F^ε converge uniformément vers F sur tout compact de $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Continuité. Soient $\varepsilon \geq 0$, $x \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$ de limite x pour la norme uniforme, et $\alpha > 0$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$, et on a aussi $\|x\| \leq M$. u^ε est continue, donc uniformément continue sur le compact $[0, T] \times \mathcal{K}$, où \mathcal{K} désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon M dans \mathbb{R}^k . Il existe $\eta > 0$ tel que $|s - s'| < \eta$ et $|z - z'| < \eta$, $z, z' \in \mathcal{K}$ impliquent $|u^\varepsilon(s, z) - u^\varepsilon(s', z')| < \alpha$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| \leq \eta$. Pour tout $s \in [0, T]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $x(s)$ et $x_n(s)$ sont dans \mathcal{K} , et donc pour tout $n \geq n_0$, $|u^\varepsilon(s, x(s)) - u^\varepsilon(s, x_n(s))| \leq \alpha$. $F^\varepsilon(x_n)$ tend vers $F^\varepsilon(x)$ quand n tend vers l'infini. F^ε est continue pour tout ε .

Convergence uniforme compacte vers F. Soient \mathcal{K} un compact de $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$, et $\mathcal{L} = \{\varphi_s, \varphi \in \mathcal{K}, s \in [0, T]\}$. \mathcal{L} est un compact de \mathbb{R}^k , donc d'après le Théorème 2.1, il existe une constante C qui ne dépend que de T et du compact \mathcal{L} , telle que :

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{K}} \|F^\varepsilon(\varphi) - F(\varphi)\|^2 = \sup_{\varphi \in \mathcal{K}} \sup_{s \in [0, T]} |Y_s^{\varepsilon,s,\varphi_s} - \psi_s^{s,\varphi_s}|^2 \leq \sup_{x \in \mathcal{L}} \sup_{s \in [0, T]} |Y_s^{\varepsilon,s,x} - \psi_s^{s,x}|^2 \leq C\varepsilon^2. \quad \square$$

Si $\sigma \sigma^*$ est inversible, la fonction de taux I'_x est donnée par :

$$I'_x(\psi) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T Q_{\varphi_t}^*(\dot{\varphi}_t - \beta(\varphi_t)) dt : \varphi \in H^1([0, T], \mathbb{R}^k), \varphi_0 = x, \psi_t = u(t, \varphi_t) \forall t \in [0, T] \right\}$$

où Q^* est défini par (5). On cherche à lui donner une forme explicite, en utilisant les flots des équations différentielles (3) et (4). Il s'agit d'inverser l'expression $\psi_s = u(s, \varphi_s)$ pour tout $s \in [0, T]$, ou plus généralement $y = u(s, x)$ en $x = \theta(s, y)$, pour tous $s \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^k$. On suppose que g est inversible et dérivable, g' ne s'annulant pas, et,

pour nous placer dans un cadre autonome, que f ne dépend que de (y, z) . Notons μ et ν les flots respectifs des équations différentielles $\varphi' = \beta(\varphi)$ et $\psi' = -f(\psi, 0)$. En utilisant l'invariance du flot et l'expression des fonctions $\varphi^{s,x}$ et $\psi^{s,x}$ en fonction de μ et ν , il vient : pour tout $0 \leq s \leq T$ et tout $x \in \mathbb{R}^k$,

$$x = \mu(s - T, \mu(T - s, x)) = \mu(s - T, g^{-1}\{\psi_T^{s,x}\}) = \mu(s - T, g^{-1}\{\nu[T - s, u(s, x)]\})$$

$y = u(s, x)$ équivaut donc à $x = \theta(s, y)$ avec $\theta(s, y) = \mu(s - T, g^{-1}(\nu(T - s, y)))$. Soit $\varphi \in H^1([0, T], \mathbb{R}^k)$ telle que $\varphi_0 = x$ et ψ vérifiant $\psi_s = u(s, \varphi_s)$ pour tout $s \in [0, T]$. Alors, pour tout $s \in [0, T]$, $\varphi_s = \theta(s, \psi_s)$. Comme on a supposé g^{-1} dérivable, et que les flots sont différentiables, on peut aussi exprimer la dérivée de φ en fonction de ψ , si $\psi \in H^1([0, T], \mathbb{R}^k)$: $\dot{\varphi}_s = \frac{\partial \theta}{\partial s}(s, \psi_s) + \sum_{i=1}^k (\dot{\psi}_s)_i \frac{\partial \theta}{\partial y_i}(s, \psi_s)$. Ainsi, si $\psi \in H^1([0, T], \mathbb{R}^k)$, et $\psi_0 = u(0, x)$,

$$I'_x(\psi) = \frac{1}{2} \int_0^T Q_{\theta(s, \psi_s)}^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial s}(s, \psi_s) + \langle \dot{\psi}_s, \nabla \theta(s, \psi_s) \rangle - \beta(\theta(s, \psi_s)) \right) ds.$$

Remarque. On peut également étudier les grandes déviations associées à la convergence de systèmes d'EDSPR à horizon aléatoire (avec un générateur autonome, cf. [4], ou qui dépend du temps, cf. [1]). Le cadre de travail est alors nettement plus complexe et nous oblige à démontrer de nouveaux résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions d'EDSR à horizon aléatoire. De plus, les résultats obtenus en [1] et [4] ne sont pas une généralisation de celui-ci, car ils sont basés sur le problème des « goulots de sortie » hors d'un ouvert borné introduit par Freidlin et Wentzell. Cela impose, en particulier, de travailler dans un espace de trajectoires explosives au lieu de $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$, les calculs explicites des fonctions de taux étant alors impossibles en général.

Références

- [1] H. Doss, S. Rainero, Sur l'Existence, l'Unicité, la Stabilité et les propriétés de Grandes Déviations des solutions d'Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades à horizon aléatoire. Application à des problèmes de perturbations singulières. À paraître au Bulletin des Sciences Mathématiques, 2006.
- [2] M.I. Freidlin, A.D. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1984.
- [3] É. Pardoux, Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order, in: L. Decreusefond, J. Gjerde, B. Oksendal, A.S. Ustünel (Eds.), Stochastic Analysis and Related Topics: The Geilo Workshop, Birkhäuser, 1996, pp. 79–127.
- [4] S. Rainero, Grandes déviations pour une équation différentielle stochastique rétrograde à horizon aléatoire. Application à l'étude d'une E.D.P. elliptique semi-linéaire, Cahiers du Ceremade, 2006-29, 2005.
- [5] S.R.S. Varadhan, Large Deviations and Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1984.