

## Géométrie algébrique

# Noethérianité et privilège en géométrie analytique $p$ -adique

Jérôme Poineau

*IRMAR, université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France*

Reçu le 9 mai 2006 ; accepté le 6 juin 2006

Disponible sur Internet le 13 juillet 2006

Présenté par Michel Raynaud

---

### Résumé

Soient  $k$  un corps ultramétrique complet,  $X$  un espace  $k$ -affinoïde et  $f$  une fonction analytique sur  $X$ . Notre théorème principal décrit avec précision la variation des composantes connexes géométriques des espaces du type  $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ , en fonction de  $\varepsilon$ . Nous obtenons également des résultats de privilège et de noethérianité au voisinage d'un compact, analogues à ceux de la géométrie analytique complexe. *Pour citer cet article : J. Poineau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Noetherianity and privilege in  $p$ -adic analytic geometry.** Let  $k$  be a non-Archimedean field,  $X$  a  $k$ -affinoid space and  $f$  an analytic function over  $X$ . We describe precisely how the geometric connected components of the spaces  $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$  behave with regards to  $\varepsilon$ . We also obtain a result concerning privileged neighbourhoods and adapt a theorem from complex analytic geometry about Noetherianity for germs of analytic functions. *To cite this article: J. Poineau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Le travail que nous présentons ici trouve son origine dans une tentative d'adapter au cadre  $p$ -adique un résultat, dû à J. Frisch (cf. [9]), assurant la noethérianité de l'anneau des germes de fonctions au voisinage de certains compacts. C. Bănică et O. Stănăşilă en ont rédigé, dans [2], 5, fin du §3, une démonstration, dont les arguments peuvent s'adapter, tels quels, au cadre  $p$ -adique.

Soit  $k$  un corps ultramétrique complet. Nous nous placerons, ici et dans la suite du texte, dans le cadre des espaces  $k$ -analytiques, au sens de V.G. Berkovich (cf. [3,4]). Nous dirons qu'une partie  $A$  d'un espace  $k$ -analytique est morcelable si, pour tout fermé de Zariski  $Z$  défini au voisinage de  $A$ , l'image réciproque de  $A \cap Z$  dans le normalisé de  $Z$  possède un nombre fini de composantes connexes. Les parties semi-algébriques des espaces affinoïdes en sont des exemples.

**Théorème 1.1.** *Soient  $X$  un bon espace  $k$ -analytique et  $K$  un compact de Stein morcelable contenu dans  $X$ . Alors l'anneau des germes de fonctions au voisinage de  $K$  est noethérien.*

---

Adresse e-mail : [jerome.poineau@univ-rennes1.fr](mailto:jerome.poineau@univ-rennes1.fr) (J. Poineau).

La démonstration originale de J. Frisch nous a invité à nous intéresser aux voisinages privilégiés et à étendre au cadre ultramétrique le résultat d’A. Douady (cf. [6], §6, Théorème 1) :

**Théorème 1.2.** *Soient  $X$  un espace  $k$ -affinoïde et  $\mathcal{F}$  une famille finie de faisceaux cohérents sur  $X$ . Tout point de  $X$  possède un système fondamental de voisinages affinoïdes privilégiés pour chacun des faisceaux de  $\mathcal{F}$ .*

Nous pouvons proposer une démonstration simple de ce théorème, pour peu que nous disposions d’une sorte d’extension du théorème de Hartogs, sous la forme suivante :

**Théorème 1.3.** *Soit  $X$  un espace  $k$ -affinoïde irréductible et  $f$  une fonction analytique sur  $X$ . Alors le domaine affinoïde de  $X$  défini par*

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

*est irréductible, dès que  $\varepsilon$  est assez petit.*

La suite de ce texte sera consacrée à la preuve du Théorème 1.3. Indiquons encore que l’on en déduit facilement le résultat suivant. Il figure déjà dans [3], §2.3, sans démonstration.

**Corollaire 1.4.** *Tout point d’un bon espace  $k$ -analytique en lequel l’anneau local est intègre admet une base de voisinages affinoïdes irréductibles.*

## 2. Connexité des fibres d’un morphisme

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme entre espaces  $k$ -affinoïdes. Si  $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  désigne un modèle formel du morphisme  $\varphi$ , nous savons, d’après [10], 9.7.9, qu’il existe une partition de la fibre spéciale  $\mathcal{Y}_s$  en un nombre fini de parties constructibles au-dessus desquelles le nombre des composantes connexes géométriques des fibres du morphisme  $\psi_s$  est constant.

Lorsque le morphisme  $\psi$  est plat et à fibres géométriquement réduites, nous pouvons en déduire le même résultat pour le morphisme  $\varphi$  au-dessus des tubes des parties précédentes. Le théorème de la fibre réduite (cf. [5]) nous permet, sous certaines hypothèses, de nous ramener à un tel modèle. Lorsque les composantes connexes des fibres sont géométriquement connexes, nous pouvons même les repérer par des sections.

**Définition 2.1.** Soient  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme entre espaces  $k$ -analytiques et  $P$  une partie de l’espace topologique sous-jacent à  $Y$ . Nous dirons que le morphisme  $\varphi$  admet un *découpage* au-dessus de  $P$  s’il existe un entier  $r \in \mathbf{N}$  et des familles finies  $(s_i : Y_i \rightarrow Y)_{1 \leq i \leq r}$  et  $(t_i : Y_i \rightarrow Y_i \times_Y X)_{1 \leq i \leq r}$  de morphismes entre espaces  $k$ -analytiques vérifiant les conditions suivantes :

- (a) quel que soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , le morphisme  $t_i$  définit une section du morphisme  $Y_i \times_Y X \rightarrow Y_i$ , obtenu à partir de  $\varphi$  par le changement de base  $s_i$ ,
- (b) quel que soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , le morphisme  $s_i$  est quasi-étale, de source compacte et d’image contenant  $P$ ,
- (c) quel que soit  $y \in P$ , la fibre  $\varphi^{-1}(y)$  possède exactement  $r$  composantes connexes et, si  $C$  désigne l’une d’elles, il existe un unique  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que

$$\forall y' \in s_i^{-1}(y), t_i(y') \in C.$$

**Théorème 2.2.** *Soit  $\varphi : Y \rightarrow Z$  un morphisme plat entre espaces strictement  $k$ -affinoïdes dont les fibres soient géométriquement réduites. Supposons également que les composantes connexes des fibres soient géométriquement connexes. Alors il existe une partition finie de  $Z$  en domaines analytiques au-dessus desquels le morphisme  $\varphi$  admet un découpage.*

### 3. Extension du théorème de Hartogs

Supposons que le corps  $k$  soit algébriquement clos et que sa valuation ne soit pas triviale. Soit  $X$  un espace  $k$ -affinoïde normal d’algèbre  $\mathcal{A}$  et  $f$  une fonction analytique sur  $X$ , de norme spectrale égale à 1. Nous nous intéresserons aux composantes connexes des domaines affinoïdes de  $X$  du type

$$V_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

#### 3.1. Construction d’une fibration adéquate

L’injection de  $k$  dans  $\mathcal{A}$  induit un morphisme entre espaces  $k$ -affinoïdes

$$\tau : \mathbf{F} = \mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \rightarrow \mathcal{M}(k\{U\}) = \mathbf{D}.$$

Il est plat et à fibres géométriquement réduites hors de 0. En outre, quel que soit  $x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$ , la fibre  $\tau^{-1}(x)$  est isomorphe, après extension du corps de base, à l’espace  $V_\varepsilon$ , pour  $\varepsilon = |U(x)|$ .

#### 3.2. Élimination des multiplicités

Avant d’appliquer le Théorème 2.2, il convient de modifier la fibre du morphisme  $\tau$  au-dessus de 0. Le théorème de H. Epp (cf. [8]) nous permet d’éliminer ses multiplicités et d’obtenir un morphisme  $\tau' : \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{D}'$ , plat et à fibres géométriquement réduites. En outre, l’espace  $\mathbf{D}'$  possède un point rigide  $\omega$  au voisinage duquel les fibres de  $\tau'$  sont isomorphes, après extension du corps de base, à des espaces du type  $V_\varepsilon$ , pour  $\varepsilon$  proche de 0. Appliquons maintenant le Théorème 2.2 au morphisme  $\tau'$ .

Puisque  $k$  est algébriquement clos, un morphisme quasi-étale induit un isomorphisme au voisinage des points rigides. Nous pouvons donc construire, à partir des sections du découpage, des sections définies sur un voisinage de  $\omega$  qui repèrent les composantes connexes des fibres de  $\tau'$ . On en déduit qu’il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que, quel que soit  $\varepsilon' \in ]0, \varepsilon]$ , les composantes connexes de  $V_{\varepsilon'}$  soient les traces de celles de  $V_\varepsilon$ , et donc les traces de celles de  $V_+ = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ . Or W. Bartenwerfer et W. Lütkebohmert ont montré que le théorème de Hartogs restait valable sur un corps ultramétrique complet (cf. [3], 3.3.20) et  $V_+$  est donc connexe dès que  $X$  est irréductible. Le Théorème 1.3 s’en déduit.

#### 3.3. Variation des composantes connexes

Pour  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , notons  $\eta_\varepsilon$  le point de  $\mathbf{D}$  associé à la valeur absolue définie par

$$\sum_{i \geq 0} a_i U^i \in k\{U\} \mapsto \max_{i \geq 0} \{|a_i| \varepsilon^i\} \in \mathbf{R}_+.$$

La fibre  $\tau^{-1}(\eta_\varepsilon)$  est isomorphe, après extension du corps de base, à  $V_\varepsilon$ . Pour  $m \in ]0, 1] \cap \sqrt{|k^*|}$ , appliquons le Théorème 2.2 au morphisme  $\tau$  considéré au-dessus du domaine affinoïde  $W_m = \{y \in \mathbf{D} \mid |U(y)| \geq m\}$ . Nous obtenons une partition  $\mathcal{P}$  de  $W_m$  en domaines analytiques sur lesquels  $\tau$  admet un découpage.

Le squelette de l’espace  $k$ -affinoïde  $W_m$  est le segment  $J_m = \{\eta_\varepsilon \in W_m, \varepsilon \in [m, 1]\}$ . D’après [7], 3.1, si  $s$  est l’un des morphismes quasi-étales du découpage, il existe une partition finie du compact  $K = s^{-1}(J_m)$  en parties linéaires qui sont homéomorphes à leur image par  $\varphi$ , elle-même linéaire. Pour chaque  $P \in \mathcal{P}$ , nous pouvons donc construire, à partir de la section associée à  $\varphi$ , une section de  $\tau$  au-dessus de  $P$ .

La forme particulière que l’on peut imposer aux éléments de  $\mathcal{P}$  entraîne que leur trace sur  $J_m$  est une réunion finie d’intervalles. Quitte à les restreindre, nous pouvons construire, au-dessus de chacun d’eux, des sections repérant les composantes connexes des fibres de  $\tau$ . En choisissant le réel  $m$  assez petit et en utilisant le Théorème 1.3 pour  $\varepsilon$  proche de 0, nous obtenons finalement le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Soient  $k$  un corps ultramétrique complet,  $X$  un espace  $k$ -affinoïde et  $f$  une fonction analytique sur  $X$ . Alors il existe une partition finie  $\mathcal{P}$  de  $\mathbf{R}^+$  en intervalles semi-ouverts à gauche satisfaisant la condition suivante : quel que soit  $I \in \mathcal{P}$ , quels que soient  $\varepsilon', \varepsilon \in I$ , avec  $\varepsilon' \leq \varepsilon$ , l’inclusion*

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

*induit une bijection entre les ensembles de composantes connexes (resp. irréductibles) géométriques.*

Signalons qu’A. Abbes et T. Saito ont également démontré l’existence d’une telle partition pour des intervalles du type  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$  (cf. [1], 5.1).

## Remerciements

Je tiens remercier Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros pour les nombreux conseils et encouragements qu’ils m’ont prodigués et sans lesquels je n’aurais pu mener à bien ce travail.

## Références

- [1] A. Abbes, T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Amer. J. Math.* 124 (2002) 879–920.
- [2] C. Bănică, O. Stănășilă, *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes*. Vol. 2, Troisième édition, Gauthier-Villars, Paris, 1977. Traduit du roumain, collection “*Varia Mathematica*”.
- [3] V.G. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [4] V.G. Berkovich, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 78 (1994) 5–161, 1993.
- [5] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem, *Invent. Math.* 119 (2) (1995) 361–398.
- [6] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d’un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 16 (1) (1966) 1–95.
- [7] A. Ducros, Image réciproque du squelette par un morphisme entre espaces de Berkovich de même dimension, *Bull. Soc. Math. France* 131 (4) (2003) 483–506.
- [8] H.P. Epp, Eliminating wild ramification, *Invent. Math.* 19 (1973) 235–249.
- [9] J. Frisch, Points de platitude d’un morphisme d’espaces analytiques complexes, *Invent. Math.* 4 (1967) 118–138.
- [10] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 28, 1966.