

Analyse numérique

# Une méthode par éléments finis mixte préservant la positivité pour le problème de contact en élasticité

Patrick Hild

Laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon, France

Reçu le 10 avril 2006 ; accepté après révision le 13 juin 2006

Disponible sur Internet le 5 juillet 2006

Présenté par Philippe G. Ciarlet

---

## Résumé

Nous considérons une méthode par éléments finis mixte pour le problème de contact en élasticité qui fournit des champs approchés (déplacements et contraintes) satisfaisant les conditions de signe du problème continu. Nous montrons que la méthode vérifie des estimations a priori de l'erreur identiques à la méthode standard. *Pour citer cet article : P. Hild, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A positivity preserving mixed finite element method for the contact problem in elasticity.** We consider a mixed finite element method for the contact problem in elasticity that furnishes approximated fields (displacements and constraints) satisfying the sign conditions of the continuous problem. We prove that the method verifies similar a priori error estimates as the standard method. *To cite this article: P. Hild, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Les méthodes par éléments finis sont couramment utilisées dans l'approximation numérique des problèmes de contact (voir [5,6,9,10,12]) et il est d'usage d'adopter des formulations sous forme mixte où les inconnues sont le déplacement  $\mathbf{u}$  dans le solide et la contrainte normale  $\sigma_n(\mathbf{u})$  sur la zone de contact. Une particularité du problème de contact réside dans la condition unilatérale liant, sur la zone de contact  $\Gamma_C$ , le déplacement normal  $u_n$  et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda = -\sigma_n(\mathbf{u}) : u_n \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda u_n = 0$  sur  $\Gamma_C$ .

La méthode par éléments finis que nous considérons, initialement introduite dans [7], fournit un déplacement normal approché  $u_{hn}$  et un multiplicateur approché  $\lambda_h$  vérifiant :

$$u_{hn} \leq 0, \quad \lambda_h \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad \lambda_h u_{hn} = 0 \quad \text{aux nœuds de } \Gamma_C.$$

Une telle approche comprend trois aspects intéressants en comparaison avec la méthode standard dans laquelle le multiplicateur est seulement positif en un sens faible (voir [2,4,8]) :

---

Adresse e-mail : [patrick.hild@univ-fcomte.fr](mailto:patrick.hild@univ-fcomte.fr) (P. Hild).

- le multiplicateur positif est plus représentatif du point de vue mécanique,
- le multiplicateur s’annule lorsque l’objet décolle (le multiplicateur de l’approche standard incorpore souvent des oscillations « artificielles » sur la zone de séparation),
- cette approche permet de définir un estimateur d’erreur a posteriori simple dont l’analyse numérique est meilleure que pour l’estimateur d’erreur a posteriori issu de la méthode standard (voir [7]).

Le but de cette note est de montrer que la méthode proposée est convergente et d’obtenir des estimations a priori de l’erreur similaires à celles de la méthode standard. Par ailleurs, notons qu’il existe d’autres approches donnant des estimations d’erreur a priori où le multiplicateur approché est positif mais où le déplacement normal ne vérifie pas la condition de signe (voir [2,6,11]).

## 2. Le problème de contact en élasticité et son approximation par éléments finis

Considérons la déformation d’un corps élastique représenté par l’ouvert borné polygonal  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_C}$ , où les ouverts  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_C$  sont disjoints deux à deux et vérifient  $\text{mes}(\Gamma_C) > 0$  et  $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ . Le corps  $\Omega$ , soumis à des forces volumiques  $\mathbf{f}$ , est encastré sur  $\Gamma_D$ , soumis à des densités de forces surfaciques  $\mathbf{g}$  sur  $\Gamma_N$  et en contact sans frottement avec un socle rigide indéformable sur le segment de droite  $\Gamma_C$  (pour simplifier). Le problème de contact consiste à trouver le champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  vérifiant (1)–(2) :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g} \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (1)$$

La notation  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  (resp.  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})/2$ ) désigne le tenseur d’ordre deux des contraintes (resp. déformations),  $\mathbf{C}$  représente le tenseur d’ordre quatre symétrique et elliptique de l’élasticité et  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . Etant donné un champ de déplacements  $\mathbf{v}$  sur  $\Omega$ , on adopte les notations suivantes sur  $\partial\Omega$  :  $\mathbf{v} = v_n\mathbf{n} + v_t\mathbf{t}$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{v})\mathbf{n} + \sigma_t(\mathbf{v})\mathbf{t}$ , où  $\mathbf{t}$  désigne un vecteur unitaire tangent à  $\Omega$ . Finalement les conditions de contact sans frottement sur  $\Gamma_C$  s’écrivent :

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u})u_n = 0, \quad \sigma_t(\mathbf{u}) = 0. \quad (2)$$

Soient  $(H^s(\cdot))^d$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $d = 1, 2$ , les espaces de Sobolev en dimension un et deux ; la norme usuelle (duale si  $s < 0$ ) de  $(H^s(D))^d$  (voir [1]) est notée  $\|\cdot\|_{s,D}$  pour  $d = 1$  ou  $d = 2$ . Pour tous  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D\}$  et  $\mu$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_C)$ , on pose :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad b(\mu, \mathbf{v}) = \langle \mu, v_n \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_C}, \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_C}$  représente le crochet de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ . On définit le convexe des multiplicateurs :  $M^+ = \{\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C) : \langle \mu, \psi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_C} \geq 0 \text{ pour tout } \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \psi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_C\}$ . La formulation mixte du problème de contact (1)–(2) consiste à trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  et  $\lambda \in M^+$  tels que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mu - \lambda, \mathbf{u}) \leq 0, & \forall \mu \in M^+. \end{cases} \quad (3)$$

Le problème (3) admet une unique solution  $(\lambda, \mathbf{u})$  (voir [6]) et  $\lambda = -\sigma_n(\mathbf{u})$ . Une autre formulation faible de (1)–(2) consiste à trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$  tel que  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$ .

On munit  $\Omega$  d’une famille régulière de triangulations  $T_h$  formées d’éléments de diamètre inférieur à  $h$  (voir [3]) et l’on suppose que la triangulation « 1D » induite sur  $\Gamma_C$  est uniformément régulière. On suppose pour des raisons techniques que  $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D} = \emptyset$ . L’espace d’éléments finis de degré un approchant  $\mathbf{V}$  est :

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \forall \kappa \in T_h, \mathbf{v}_{h|\kappa} \in (P_1(\kappa))^2, \mathbf{v}_{h|\Gamma_D} = \mathbf{0}\}$$

et on pose :  $W_h = \{\mu_h \in C(\overline{\Gamma_C}) : \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ t.q. } \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \mu_h \text{ sur } \Gamma_C\}$ ,  $W_h^+ = \{\mu_h \in W_h : \mu_h \geq 0\}$ .

Le problème discret approchant (3) est : trouver  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  et  $\lambda_h \in W_h^+$  tels que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\lambda_h v_{hn}) \, d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_C} I_h((\mu_h - \lambda_h)u_{hn}) \, d\Gamma \leq 0, & \forall \mu_h \in W_h^+, \end{cases} \quad (4)$$

où  $I_h$  désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange de degré un aux nœuds sur  $\Gamma_C$ .

**Proposition 2.1.**

- (i) Le problème (4) admet une unique solution  $(\lambda_h, \mathbf{u}_h) \in W_h^+ \times \mathbf{V}_h$ ,
- (ii) On a  $u_{hn} \leq 0$ ,  $\lambda_h \geq 0$  sur  $\Gamma_C$ ;  $\lambda_h u_{hn} = 0$  aux nœuds de  $\Gamma_C$ ,
- (iii) Le champ de déplacements  $\mathbf{u}_h$  solution de (4) est l'unique solution du problème : trouver  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : v_{hn} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$  tel que  $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ .

L'approche « classique » (voir [2,4,8]) consiste à considérer le problème discret suivant (admettant une unique solution) : trouver  $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h$  et  $\theta_h \in M_h^+ = \{\mu_h \in W_h : \int_{\Gamma_C} \mu_h \psi_h d\Gamma \geq 0, \forall \psi_h \in W_h^+\}$  tels que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + b(\theta_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mu_h - \theta_h, \mathbf{w}_h) \leq 0, & \forall \mu_h \in M_h^+. \end{cases} \tag{5}$$

**Remarque 1.** On a  $W_h^+ \subset M^+$  et  $W_h^+ \subset M_h^+ \not\subset M^+$ .

**Proposition 2.2.** Les solutions  $(\lambda_h, \mathbf{u}_h)$  et  $(\theta_h, \mathbf{w}_h)$  des problèmes (4) et (5) vérifient :

- (i)  $\mathbf{u}_h = \mathbf{w}_h$ ,
- (ii)  $\lambda_h = \pi_h \theta_h$  où  $\pi_h$  est l'opérateur de quasi-interpolation défini pour toute fonction  $v$  dans  $L^1(\Gamma_C)$  par :  $\pi_h v = \sum_{x \in N_h} \alpha_x(v) \psi_x$ , où  $N_h$  désigne l'ensemble des nœuds de  $\overline{\Gamma_C}$ ,  $\psi_x$  est la fonction de base de  $W_h$  (définie sur  $\overline{\Gamma_C}$ ) au nœud  $x$  vérifiant  $\psi_x(x') = \delta_{x,x'}$  pour tout  $x' \in N_h$  et  $\alpha_x(v) = (\int_{\Gamma_C} v \psi_x) (\int_{\Gamma_C} \psi_x)^{-1}$ .

**Remarque 2.** L'opérateur linéaire  $\pi_h$  conserve non seulement la positivité mais vérifie  $\pi_h(M_h^+) = W_h^+$  c'est à dire qu'il rend positives les fonctions qui vérifient une condition de positivité affaiblie.

**3. Estimation d'erreur a priori**

Si  $\mathbf{u} \in (H^{3/2+\nu}(\Omega))^2 (0 < \nu \leq 1/2)$ , notons  $\gamma_c = \{x \in \Gamma_C : u_n(x) = 0\}$  et  $\gamma_s = \Gamma_C \setminus \gamma_c$ . Soit l'hypothèse :

le nombre de points dans  $\overline{\gamma_c} \cap \overline{\gamma_s}$  est fini. (6)

Rappelons le résultat établi dans [8], concernant l'approche standard (5), dont nous faisons usage.

**Théorème 3.1.** [8] Soit  $(\lambda, \mathbf{u})$  la solution de (3) et soit  $(\theta_h, \mathbf{u}_h)$  la solution de (5). Supposons que (6) ait lieu et que  $\mathbf{u} \in (H^{3/2+\nu}(\Omega))^2$  avec  $0 < \nu \leq 1/2$ . Alors il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\lambda - \theta_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}.$$

On en déduit immédiatement le lemme suivant par inégalité triangulaire.

**Lemme 3.2.** Soit  $(\lambda, \mathbf{u})$  la solution de (3), soit  $(\lambda_h, \mathbf{u}_h)$  la solution de (4) et soit  $(\theta_h, \mathbf{u}_h)$  la solution de (5). Supposons que (6) ait lieu et que  $\mathbf{u} \in (H^{3/2+\nu}(\Omega))^2$  avec  $0 < \nu \leq 1/2$ . Alors il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\lambda - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega} + \|\lambda_h - \theta_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C}.$$

**Lemme 3.3.** Sous les hypothèses du Lemme 3.2, il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\lambda_h - \theta_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \leq C(h^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega} + h^{\frac{1}{2}} \|\lambda_h - \theta_h\|_{0,\Gamma_C}).$$

L'étape essentielle pour démontrer ce lemme consiste à établir que  $\|\lambda_h - \theta_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\bar{\lambda} - \lambda_h\|_{0, \Gamma_C}$  où  $\bar{\lambda}$  désigne la projection au sens de  $L^2$  sur l'espace des fonctions constantes par morceaux. Ce résultat est obtenu par l'utilisation d'une condition inf-sup sur  $b(\cdot, \cdot)$ , le fait que  $b(\theta_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Gamma_C} I_h(\lambda_h v_{hn})$ ,  $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ , et par les majorations  $\int_E \lambda_h v_{hn} - I_h(\lambda_h v_{hn}) \leq Ch_E^3 |(\lambda_h v_{hn})''| \leq Ch_E^3 |\lambda_h' v_{hn}'| \leq Ch_E^2 \|\lambda_h'\|_{0, E} \|v_{hn}'\|_{0, E} = Ch_E^2 \|(\lambda_h - \bar{\lambda})'\|_{0, E} \|v_{hn}'\|_{0, E} \leq Ch_E \|\lambda_h - \bar{\lambda}\|_{0, E} \|v_{hn}'\|_{0, E} \leq Ch_E^{1/2} \|\lambda_h - \bar{\lambda}\|_{0, E} \|\mathbf{v}_h\|_{1, K}$  pour toute arête  $E$  (de longueur  $h_E$ ) d'un triangle  $K$  située sur  $\bar{\Gamma}_C$ .

Les deux lemmes suivants concernent les propriétés de stabilité et d'approximation de  $\pi_h$  dans  $L^2$ .

**Lemme 3.4.** Soit  $E_h$  la trace de la triangulation  $T_h$  sur  $\bar{\Gamma}_C$  (les arêtes  $E$  constituant  $E_h$  sont supposées relativement fermées). Pour tous  $v \in L^1(\Gamma_C)$  et  $E \in E_h$  on a :

$$\|\pi_h v\|_{0, E} \leq C \|v\|_{0, \gamma_E} \quad \text{où } \gamma_E = \bigcup_{\{F \in E_h: F \cap E \neq \emptyset\}} F.$$

**Lemme 3.5.** Pour tous  $v \in H^v(\Gamma_C)$ ,  $0 \leq v \leq 1$ , et  $E \in E_h$  il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|v - \pi_h v\|_{0, E} \leq Ch^v \|v\|_{v, \gamma_E}.$$

**Lemme 3.6.** Sous les hypothèses du Lemme 3.2, il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\lambda_h - \theta_h\|_{0, \Gamma_C} \leq Ch^v \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+v, \Omega}.$$

Ce lemme est obtenu par application des Lemmes 3.4, 3.5 et du Théorème 3.1 en remarquant que  $\|\lambda_h - \theta_h\|_{0, \Gamma_C} \leq \|(\theta_h - \lambda) - \pi_h(\theta_h - \lambda)\|_{0, \Gamma_C} + \|\lambda - \pi_h \lambda\|_{0, \Gamma_C}$ . Finalement on a :

**Théorème 3.7.** Soit  $(\lambda, \mathbf{u})$  la solution de (3) et soit  $(\lambda_h, \mathbf{u}_h)$  la solution de (4). Supposons que (6) ait lieu et que  $\mathbf{u} \in (H^{\frac{3}{2}+v}(\Omega))^2$  avec  $0 < v \leq 1/2$ . Alors il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega} + \|\lambda - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}+v} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+v, \Omega}.$$

**Remarque 3.** L'hypothèse (6) est relative à la finitude des points de transition entre zones de contact et zones de décollement. Sans cette hypothèse dont on ne sait pas établir qu'elle est vérifiée en pratique, on peut quand même montrer la convergence de la méthode (4) avec un taux non optimal.

Ce travail bénéficie d'un soutien de l'Agence Nationale de la Recherche (projet JC05\_44355).

## Références

- [1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.
- [2] F. Ben Belgacem, Y. Renard, Hybrid finite element methods for the Signorini problem, Math. Comp. 72 (2003) 1117–1145.
- [3] P.G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), in: Handbook of Numerical Analysis, vol. II, North-Holland, 1991, pp. 17–352, Part 1.
- [4] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, T. Sassi, Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies, Math. Comp. 71 (2002) 1–25.
- [5] W. Han, M. Sofonea, Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, American Mathematical Society, 2002.
- [6] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), in: Handbook of Numerical Analysis, vol. IV, North-Holland, 1996, pp. 313–485 (Part 2).
- [7] P. Hild and S. Nicaise, Residual a posteriori error estimators for contact problems in elasticity, Prépublication 2005/49 du Laboratoire de Mathématiques de Besançon, soumis.
- [8] S. Hübner, B. Wohlmuth, An optimal error estimate for nonlinear contact problems, SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005) 156–173.
- [9] N. Kikuchi, J.T. Oden, Contact Problems in Elasticity, SIAM, 1988.
- [10] T. Laursen, Computational Contact and Impact Mechanics, Springer, 2002.
- [11] K. Lhalouani, T. Sassi, Nonconforming mixed variational formulation and domain decomposition for unilateral problems, East-West J. Numer. Math. 7 (1999) 23–30.
- [12] P. Wriggers, Computational Contact Mechanics, Wiley, 2002.