

Algèbre

# Stabilité de la propriété de Koszul pour les algèbres homogènes vis-à-vis du produit semi-croisé

Antonin Pottier<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*

<sup>b</sup> *Laboratoire de physique théorique d'Orsay, université Paris-sud 11, 91405 Orsay cedex, France*

Reçu le 15 mars 2006 ; accepté après révision le 6 juin 2006

Présenté par Alain Connes

---

## Résumé

Nous étudions la conservation des propriétés de Koszul et de Gorenstein pour le produit semi-croisé des algèbres homogènes. *Pour citer cet article : A. Pottier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Stability of the Koszul property for the semi-cross product of homogeneous algebras.** We study the stability of Koszul and Gorenstein properties for the semi-cross product of homogeneous algebras. We use the formalism of  $N$ -complexes. The proofs are illustrated by the example of the algebra generated by Yang–Baxter relations. *To cite this article: A. Pottier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Le but de cette Note est d'étudier la stabilité de certaines propriétés homologiques des algèbres homogènes par produit semi-croisé, introduit au paragraphe 7.1 de [4]. Plus précisément, nous montrons qu'une algèbre homogène est de type Koszul si et seulement si un de ses produits semi-croisés l'est. Dans le cas où la dimension globale est finie, être de type Gorenstein est équivalent pour l'algèbre et ses produits semi-croisés.

Différentes notions relatives aux algèbres quadratiques introduites dans [8] sont généralisées aux algèbres homogènes dans [3]. En particulier un  $N$ -complexe est canoniquement attaché à toute algèbre  $N$ -homogène, dont le complexe de Koszul de [2] est une contraction. Dans l'article [2], il est montré qu'être de type Koszul pour une algèbre homogène est équivalent à l'acyclicité de ce complexe. C'est cette caractérisation que nous utiliserons. En plus d'algèbres quadratiques, on trouve des algèbres cubiques dans la classification des algèbres régulières de dimension 3 décrite dans [1]. D'autres exemples d'algèbres homogènes de degré supérieur à 3 ont été étudiées par la suite dans [2], ainsi que dans [6] et [5] en liaison avec certaines équations issues de la physique théorique.

---

Adresse e-mail : [antonin.pottier@ens.fr](mailto:antonin.pottier@ens.fr) (A. Pottier).

## 2. Rappels et notations

Le corps commutatif  $k$  est fixé dans toute la suite, tous les produits tensoriels seront pris sur  $k$ ,  $\otimes = \otimes_k$ . Soit  $\mathcal{A} = A(E, R)$  une algèbre homogène de degré  $N$ . C'est le quotient de l'algèbre tensorielle  $T(E)$  associée à un  $k$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie par un idéal bilatère  $I(R)$  engendré par un espace de relations  $R \subset E^{\otimes N}$ . Soit  $\alpha$  un automorphisme de l'algèbre graduée  $\mathcal{A}$ . Il est défini par un automorphisme de  $E$  étendu canoniquement à  $T(E)$ , encore noté  $\alpha$  et tel que  $\alpha(R) = R$ . L'algèbre  $\mathcal{A}^\alpha$ , produit semi-croisé de  $\mathcal{A}$  par  $\alpha$ , est donnée par l'espace vectoriel gradué sous-jacent à  $\mathcal{A}$  muni du produit  $\cdot$  défini sur les éléments homogènes par  $x \cdot y = x\alpha^{|x|}(y)$  où  $|x|$  est le degré de  $x$  et où le symbole pour le produit dans  $\mathcal{A}$  est omis, voir [4].  $\mathcal{A}^\alpha$  est encore une algèbre associative avec unité, identique à celle de  $\mathcal{A}$ . Remarquons tout de suite que  $\text{id} : \mathcal{A}^\alpha \rightarrow \mathcal{A}$  est un isomorphisme de  $k$ -espaces vectoriels et que  $\alpha$  est encore un automorphisme de l'algèbre  $\mathcal{A}^\alpha$ , ainsi que  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\alpha)^{\alpha^{-1}}$ .

Définissons maintenant  $\theta$ , automorphisme de l'espace vectoriel gradué  $T(E)$  : en degré  $n + 1$ ,  $\theta_{n+1}(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_0 \otimes \alpha(x_1) \otimes \dots \otimes \alpha^n(x_n)$ . Relativement à la décomposition  $E^{\otimes n+1} \simeq E^{\otimes p+1} \otimes E^{\otimes n-p}$ , on a la formule :

$$\theta_{n+1} = (\theta_{p+1} \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes (\alpha^{p+1} \circ \theta_{n-p})). \tag{1}$$

Comme application de ces définitions, prouvons la proposition suivante.

**Proposition 1.**  $\mathcal{A}^\alpha$  est une algèbre homogène de degré  $N$ ,  $\mathcal{A}^\alpha = A(E, \theta_N^{-1}(R))$ .

Considérons  $m : T(E) \rightarrow \mathcal{A}$  défini en degré  $n$  par  $m(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$  et  $m_\alpha : T(E) \rightarrow \mathcal{A}^\alpha$  défini en degré  $n$  par  $m_\alpha(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ . Alors le diagramme suivant d'applications linéaires commute, c'est-à-dire  $m_\alpha = m \circ \theta$ .

$$\begin{array}{ccc} T(E) & \xrightarrow{m_\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \\ \downarrow \theta & & \downarrow \text{id} \\ T(E) & \xrightarrow{m} & \mathcal{A} \end{array}$$

Par définition [3],  $\text{Ker } m = I(R)$ , d'où l'égalité  $\text{Ker } m_\alpha = \theta^{-1}(I(R)) = I(\theta_N^{-1}(R))$ . En conséquence  $\mathcal{A}^\alpha$  est une algèbre homogène de degré  $N$ ,  $\mathcal{A}^\alpha = A(E, \theta_N^{-1}(R))$ .

**Exemple.** Soient  $\mathcal{A} = A(E = kx \oplus ky, x \otimes y \otimes x - y \otimes x \otimes y)$  l'algèbre des tresses à 3 brins et  $\alpha$  l'automorphisme involutif échangeant  $x$  et  $y$ . Alors le produit semi-croisé de  $\mathcal{A}$  par  $\alpha$  est  $\mathcal{A}^\alpha = A(E, x \otimes x \otimes x - y \otimes y \otimes y)$ , ce qui est une écriture plus symétrique. Nous poursuivrons plus loin l'étude de cette algèbre via son produit semi-croisé.

## 3. Conservation des types Koszul et Gorenstein

**Théorème 2.**  $\mathcal{A}$  est de type Koszul si et seulement si  $\mathcal{A}^\alpha$  est de type Koszul.

D'après [2],  $\mathcal{A}$  est de type Koszul si et seulement si le complexe de Koszul  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche est acyclique en degrés strictement positifs. D'après [3], le complexe  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire

$$\dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{(p+1)N}^{!*} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{pN+1}^{!*} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{pN}^{!*} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \longrightarrow 0,$$

est la contraction  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{N-1,0}$  du  $N$ -complexe  $K(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche (avec  $\delta = d^{N-1}$ )

$$\dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i+1}^{!*} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_i^{!*} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i-1}^{!*} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \longrightarrow 0.$$

Nous pouvons voir  $(K(\mathcal{A}), d)$  comme un  $N$ -complexe d'espaces vectoriels. Nous allons construire un isomorphisme de  $N$ -complexes entre  $(K(\mathcal{A}^\alpha), d^\alpha)$  et  $(K(\mathcal{A}), d)$ . Cela induira un isomorphisme de complexes entre leurs contractions. Un isomorphisme de complexes étant un homomorphisme, l'acyclicité de  $\mathcal{C}^\alpha$  sera équivalente à celle de  $\mathcal{C}$ , ce qui prouvera le théorème.

Rappelons que  $\mathcal{A}_i^{!*}$  est naturellement un sous-espace de  $E^{\otimes i}$  (cf. [3]). Définissons  $K(\theta) : K(\mathcal{A}^\alpha) \rightarrow K(\mathcal{A})$  en degré  $i$  par :

$$\begin{aligned}
 K(\theta)_i : K(\mathcal{A}^\alpha)_i &= \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_i^{!*} \rightarrow K(\mathcal{A})_i = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_i^{!*}, \\
 a \otimes e &\mapsto a \otimes (\alpha^{|a|} \circ \theta_i)(e).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Il est clair que  $K(\theta)_i$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Vérifions alors que  $K(\theta)$  est un morphisme de  $N$ -complexes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{d^\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_{i+1}^{!*} & \xrightarrow{d^\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_i^{!*} & \xrightarrow{d^\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_{i-1}^{!*} \xrightarrow{d^\alpha} \cdots \\
 & & \downarrow K(\theta)_{i+1} & & \downarrow K(\theta)_i & & \downarrow K(\theta)_{i-1} \\
 \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i+1}^{!*} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_i^{!*} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i-1}^{!*} \xrightarrow{d} \cdots
 \end{array}$$

Soit  $a \otimes (e \otimes f)$  un élément générique de  $\mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_{i+1}^{!*}$  avec  $\mathcal{A}_{i+1}^{!*} \subset E^{\otimes i+1} \simeq E \otimes E^{\otimes i}$ . D'une part  $d^\alpha(a \otimes (e \otimes f)) = a \cdot e \otimes f = a\alpha^{|a|}(e) \otimes f$ , donc  $K(\theta)_i \circ d^\alpha(a \otimes (e \otimes f)) = a\alpha^{|a|}(e) \otimes \alpha^{|a|+1}(\theta_i(f))$  car  $|a\alpha^{|a|}(e)| = |a| + 1$  puisque  $\alpha$  est de degré 0. D'autre part  $K(\theta)_{i+1}(a \otimes (e \otimes f)) = a \otimes \alpha^{|a|} \circ \theta_{i+1}(e \otimes f) = a \otimes \alpha^{|a|}(e \otimes \alpha \circ \theta_i(f)) = a \otimes (\alpha^{|a|}(e) \otimes \alpha^{|a|+1}(\theta_i(f)))$  en utilisant (1), donc  $d \circ K(\theta)_{i+1}(a \otimes (e \otimes f)) = a\alpha^{|a|}(e) \otimes \alpha^{|a|+1}(\theta_i(f))$ . Finalement  $K(\theta)_i \circ d^\alpha = d \circ K(\theta)_{i+1}$ , et  $K(\theta)$  est un isomorphisme de  $N$ -complexes d'espaces vectoriels.

**Proposition 3.** *Si  $\mathcal{A}$  est de type Koszul de dimension globale finie alors  $\mathcal{A}^\alpha$  l'est aussi.*

D'après [3], dans le cas où  $\mathcal{A}$  est de type Koszul la dimension globale  $D$  est donnée par le plus grand entier tel que  $C_D \neq 0$  (avec  $C = \mathcal{A}$ ). Via l'isomorphisme  $K(\theta)$ ,  $C_D \neq 0$  équivaut à  $C_D^\alpha \neq 0$ , d'où la proposition.

**Exemple.** Montrons que  $\mathcal{A}^\alpha = A(E, R = x \otimes x \otimes x - y \otimes y \otimes y)$  est de type Koszul de dimension globale 2, ce qui montrera en vertu des théorèmes précédents que l'algèbre des tresses à 3 brins est du même type.

Le 3-complexe  $K(\mathcal{A}^\alpha)$  se calcule simplement :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{d_3} (\mathcal{A}^\alpha)^4 \xrightarrow{d_2} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{d_1} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

avec  $d_3 : a \mapsto (ax, 0, 0, -ay)$ ,  $d_2 : (a, b, c, d) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$  et  $d_1 : (a, b) \mapsto ax + by$ . Le complexe de Koszul  $C^\alpha$  obtenu en contractant s'écrit, dans ce cas :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{\delta} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

où  $\delta = d_2 \circ d_3 : a \mapsto a(x^2, -y^2)$  et  $d = d_1$ . La suite est exacte au niveau de  $(\mathcal{A}^\alpha)^2$ , c'est la définition de l'algèbre par générateurs et relations [3]. Il suffit donc de vérifier l'injectivité de la première flèche.

**Lemme.** *Les éléments  $x$  et  $y$  sont réguliers à droite (sans diviseur de zéro à gauche).*

Raisonnons par récurrence sur le degré des éléments de l'algèbre, l'initialisation étant évidente. Supposons  $x$  et  $y$  réguliers jusqu'au degré  $n$ . Soit  $a \in \mathcal{A}_{n+1}^\alpha$  tel que  $ax = 0$ , alors  $d(a, 0) = 0$ . De par l'exactitude au niveau de  $(\mathcal{A}^\alpha)^2$ , il existe  $a' \in \mathcal{A}_{n-1}^\alpha$  tel que  $\delta(a') = (a, 0)$ . Donc  $a'y^2 = 0$  et par hypothèse de récurrence  $a' = 0$  d'où  $a = a'x^2 = 0$ .  $x$  est bien régulier à droite jusqu'au degré  $n + 1$ , la démonstration pour  $y$  est identique. Le lemme est prouvé.

Puisque  $x$  et  $y$  sont réguliers à droite, la première flèche du complexe de Koszul  $C^\alpha$  est donc injective. Donc l'algèbre des tresses à 3 brins possède la propriété de Koszul et est de dimension globale 2.

**Remarque.** La propriété de Koszul permet de calculer la série de Poincaré  $P_{\mathcal{A}}(t) = \sum \dim(\mathcal{A}_n)t^n$  de  $\mathcal{A}$ . En effet, d'après [7], on a la relation suivante :

$$P_{\mathcal{A}}(t) \left( \sum_n \dim(\mathcal{A}_{Nn}^!)t^{Nn} - \dim(\mathcal{A}_{Nn+1}^!)t^{Nn+1} \right) = 1.
 \tag{3}$$

Dans notre cas  $N = 3$ , cela donne  $1/P_{\mathcal{A}}(t) = 1 - 2t + t^3 = (1-t)(1-t-t^2)$ . Ainsi l'algèbre des tresses à 3 brins est à croissance exponentielle.

**Théorème 4.** *Si  $\mathcal{A}$  est de type Koszul de dimension globale finie  $D$ , alors  $\mathcal{A}$  est de type Gorenstein si et seulement si  $\mathcal{A}^\alpha$  l'est.*

Dans les hypothèses du théorème,  $\mathcal{A}$  est de type Gorenstein si et seulement si la cohomologie du complexe dual  $\mathcal{C}'$  est nulle en degré strictement inférieur à  $D$ . Le complexe de cochaînes  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{A}$ -modules à droite est obtenu à partir du complexe de chaînes  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche en appliquant le foncteur contravariant  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, \mathcal{A})$ . Le complexe de cochaînes  $\mathcal{C}'$  est la contraction  $C_{1,0}$  du  $N$ -complexe  $L(\mathcal{A})$  obtenu en appliquant le foncteur contravariant  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, \mathcal{A})$  à  $K(\mathcal{A})$  comme expliqué dans [6]. Or, il est immédiat que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(K(\theta), \mathcal{A})$  est toujours un isomorphisme de  $N$ -complexes d'espaces vectoriels entre  $L(\mathcal{A}^\alpha)$  et  $L(\mathcal{A})$ . Il induit donc un isomorphisme de complexes entre  $(\mathcal{C}^\alpha)'$  et  $\mathcal{C}'$ , d'où un homomorphisme, ce qui prouve le théorème.

**(Contre)-exemple.** L'algèbre des tresses à 3 brins n'est pas de type Gorenstein : en effet une algèbre  $N$ -homogène de dimension globale 2 qui possède la propriété de Gorenstein est quadratique, or l'algèbre étudiée ici est cubique. On peut cependant vérifier directement que l'algèbre n'est pas de type Gorenstein. Le 3-complexe  $L(\mathcal{A}^\alpha)$  s'obtient facilement à partir de  $K(\mathcal{A}^\alpha)$  :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{d^1} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{d^2} (\mathcal{A}^\alpha)^4 \xrightarrow{d^3} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

avec  $d^1 : a \mapsto (xa, ya)$ ,  $d^2 : (a, b) \mapsto (xa, xb, ya, yb)$  et  $d^3 : (a, b, c, d) \mapsto xa - yd$ . Le complexe de Gorenstein  $(\mathcal{C}^\alpha)'$  obtenu en contractant s'écrit donc, dans ce cas :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{d'} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{\delta'} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

où  $d' = d^1$  et  $\delta' = d^3 \circ d^2 : a \mapsto (x^2, -y^2)a$ . Il est alors clair que  $H^2((\mathcal{C}^\alpha)') \neq k$ , donc l'algèbre n'est pas de type Gorenstein. En résumé, l'algèbre des tresses à 3 brins est Koszul de dimension 2, mais n'est pas Gorenstein.

## Références

- [1] M. Artin, W.F. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* 66 (1987) 171–216.
- [2] R. Berger, Koszulity for non quadratic algebras, *J. Algebra* 239 (2001) 705–734.
- [3] R. Berger, M. Dubois-Violette, M. Wambst, Homogeneous algebras, *J. Algebra* 261 (2003) 172–185, arXiv: math.QA/0203035.
- [4] A. Connes, M. Dubois-Violette, Non commutative finite dimensional manifolds II. Moduli space and structure of non commutative 3-spheres, arXiv: math.QA/0511337.
- [5] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang–Mills and some related algebras, arXiv: math.ph/0411062.
- [6] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang–Mills algebra, *Lett. Math. Phys.* 61 (2002) 149–158, arXiv: math.QA/0206205.
- [7] M. Dubois-Violette, T. Popov, Homogeneous algebras, statistics and combinatorics, *Lett. Math. Phys.* 61 (2002) 159–170, arXiv: math.QA/0207085.
- [8] S.B. Priddy, Koszul resolutions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 152 (1970) 39–60.