



Algèbre

La catégorie de foncteurs \mathcal{F}_{quad} sur les espaces quadratiques sur \mathbb{F}_2

Christine Vespa

Laboratoire analyse, géométrie et applications UMR 7539, institut Galilée, université Paris 13, 99, avenue J.B. Clément,
93430 Villetaneuse, France

Reçu le 28 février 2006 ; accepté après révision le 22 juin 2006

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous définissons la catégorie de foncteurs \mathcal{F}_{quad} , associée aux espaces vectoriels munis de formes quadratiques non dégénérées sur le corps \mathbb{F}_2 . Nous donnons des résultats concernant les objets simples de cette catégorie, dont une classification des objets simples de \mathcal{F}_{quad} qui sont non nuls sur les espaces quadratiques de dimension deux. *Pour citer cet article : C. Vespa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The functor category \mathcal{F}_{quad} over quadratic spaces over \mathbb{F}_2 . We define the functor category \mathcal{F}_{quad} , associated to \mathbb{F}_2 -vector spaces equipped with a quadratic form. We state results about simple objects of this category, including a classification of the simple objects which are non zero on the quadratic spaces of dimension two. *To cite this article: C. Vespa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let \mathcal{E}_q be the category which has \mathbb{F}_2 -vector spaces equipped with a non-degenerate quadratic form as objects and linear applications which preserve the quadratic forms as morphisms. We define a pseudo-pushout in \mathcal{E}_q which allows us to adapt the construction of the category $\text{coSpan}(\mathcal{D})$ of a category \mathcal{D} equipped with pushout given by Bénabou in [1]. This gives rise to the category \mathcal{T}_q which allows us to define the category \mathcal{F}_{quad} .

Definition 0.1. Let \mathcal{F}_{quad} be the category of functors from \mathcal{T}_q to \mathcal{E} , the category of \mathbb{F}_2 -vector spaces.

By classical results about functor categories, the category \mathcal{F}_{quad} is Abelian, equipped with a tensor product and a duality functor and has enough injective and projective objects.

The Yoneda lemma gives a set of projective generators of \mathcal{F}_{quad} indexed by a set \mathcal{S} of representatives of isometry classes of non degenerate quadratic spaces. These projective objects will be denoted P_V , for an element V of \mathcal{S} .

Adresse e-mail : vespa@math.univ-paris13.fr (C. Vespa).

A first family of simple objects of \mathcal{F}_{quad} is obtained thanks to the following theorem where \mathcal{F} is the category of functors from the category \mathcal{E}^f of finite \mathbb{F}_2 -vector spaces to the category \mathcal{E} of all \mathbb{F}_2 -vector spaces.

Theorem 0.2. *There exists a fully faithful, exact functor $\iota : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{quad}$, which preserves simple objects.*

In order to define the family of isotropic functors of \mathcal{F}_{quad} in 3.8, we consider the category \mathcal{E}_q^{deg} of \mathbb{F}_2 -vector spaces equipped with a possibly degenerate quadratic form. From this category, we construct a category \mathcal{F}_{iso} . The categories \mathcal{F}_{iso} and \mathcal{F}_{quad} are related by the following theorem.

Theorem 0.3. *There exists a faithful, exact functor $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \rightarrow \mathcal{F}_{quad}$, which preserves simple objects.*

We note the isotropic functors by iso_V of \mathcal{F}_{iso} , where V is an object of \mathcal{E}_q^{deg} and by $Iso_V = \kappa(iso_V)$ in \mathcal{F}_{quad} . We obtain a classification of simple objects of \mathcal{F}_{iso} in the next theorem, where $O(V)$ is the orthogonal group of the quadratic space V .

Theorem 0.4. *For an object V of \mathcal{E}_q^{deg} , the functor $F_V : \mathbb{F}_2[O(V)]\text{-mod} \rightarrow \mathcal{F}_{iso}$ given by $F_V(M) = iso_V \otimes_{\mathbb{F}_2[O(V)]} M$, for M a left $\mathbb{F}_2[O(V)]$ -module, satisfies the following properties: (i) the functor F_V is exact; (ii) if M is a simple $\mathbb{F}_2[O(V)]$ -module, then $F_V(M)$ is a simple object of \mathcal{F}_{iso} .*

In order to decompose the projective generators P_V of \mathcal{F}_{quad} , we define a rank type filtration on these objects as follows:

Definition 0.5. A morphism $[V \rightarrow X \leftarrow W]$ has a rank smaller or equal to i if the pullback of the corresponding diagram in \mathcal{E}_q^{deg} is a space of dimension smaller or equal to i .

We note by $\text{Hom}_{\mathcal{T}_q}^{(i)}(V, W)$ the set of morphisms from V to W of rank smaller or equal to i . We have:

Proposition 0.6. *For W an object of \mathcal{T}_q , the sub-vector space of $P_V(W) : P_V^{(i)}(W) = \mathbb{F}_2[\text{Hom}_{\mathcal{T}_q}^{(i)}(V, W)]$ defines a sub-functor of P_V .*

The functors $P_V^{(i)}$ for $i = 0, \dots, \dim(V)$ define an increasing filtration of the functor P_V . For the projective objects P_{H_0} and P_{H_1} we obtain in [4], by an explicit study, that this filtration splits. We deduce the following decompositions of these functors, in which new functors of \mathcal{F}_{quad} , called ‘mixed functors’, appear. We note $P_V^{\mathcal{F}}$, for V an object of \mathcal{E}^f , the projective object of \mathcal{F} obtained by the Yoneda lemma.

Theorem 0.7. *The projective objects P_{H_0} and P_{H_1} admit the direct sum decompositions:*

$$P_{H_0} = \iota(P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}^{\mathcal{F}}) \oplus (\text{Mix}_{0,1}^{\oplus 2} \oplus \text{Mix}_{1,1}) \oplus \text{Iso}_{H_0}, \quad P_{H_1} = \iota(P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}^{\mathcal{F}}) \oplus \text{Mix}_{1,1}^{\oplus 3} \oplus \text{Iso}_{H_1}$$

where $\text{Mix}_{0,1}$ and $\text{Mix}_{1,1}$ are mixed functors; Iso_{H_0} and Iso_{H_1} are isotropic functors.

The functors $\text{Mix}_{0,1}$ and $\text{Mix}_{1,1}$ belong to a new family of functors that are neither objects of \mathcal{F} nor objects of \mathcal{F}_{iso} . They are indecomposable and their composition factors give rise to two infinite families of new simple functors of \mathcal{F}_{quad} . As a corollary, we obtain a classification of the simple objects of \mathcal{F}_{quad} which are non zero on the non-degenerate quadratic spaces of dimension two.

1. Introduction

Ces dernières années, la catégorie $\mathcal{F}(p)$ des foncteurs de la catégorie \mathcal{E}^f des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps \mathbb{F}_p vers la catégorie \mathcal{E} de tous les \mathbb{F}_p -espaces vectoriels a été particulièrement étudiée du fait de ses liens avec divers domaines des mathématiques (voir [2], par exemple). En particulier, dans [3], Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin montrent que cette catégorie est un outil très puissant pour l’étude de la cohomologie stable du groupe linéaire.

Une des motivations de ce travail est de construire et d'étudier une catégorie \mathcal{F}_{quad} pouvant présenter des liens avec les groupes orthogonaux similaires à ceux existant entre $\mathcal{F}(p)$ et les groupes linéaires. Désormais, on choisit $p = 2$ et la catégorie $\mathcal{F}(2)$ sera notée \mathcal{F} .

2. Définition de la catégorie \mathcal{F}_{quad}

Soit \mathcal{E}_q la catégorie dont les objets sont les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une forme quadratique non dégénérée et dont les morphismes sont les applications linéaires qui conservent la forme quadratique. On constate facilement que tout morphisme de \mathcal{E}_q est un monomorphisme. D'un autre côté, les constructions reliant la catégorie \mathcal{F} à l'homologie stable du groupe linéaire utilisent de manière essentielle l'existence de rétractions dans la catégorie \mathcal{E} . Il est donc souhaitable, pour considérer des constructions analogues dans le cas quadratique, de disposer des projections orthogonales. Pour cela, on s'inspire de la construction de la catégorie des 'co-spans' $\text{coSp}(\mathcal{D})$ d'une catégorie \mathcal{D} munie de sommes amalgamées, introduite par Bénabou dans [1].

Définition 2.1. [1] Soit \mathcal{D} une catégorie admettant des sommes amalgamées ; la catégorie $\text{coSp}(\mathcal{D})$ est définie de la manière suivante :

- (i) les objets de $\text{coSp}(\mathcal{D})$ sont ceux de \mathcal{D} ;
- (ii) soient A et B deux objets de $\text{coSp}(\mathcal{D})$, $\text{Hom}_{\text{coSp}(\mathcal{D})}(A, B)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des diagrammes de la forme : $A \xrightarrow{f} D \xleftarrow{g} B$, où D est un objet de \mathcal{D} , pour la relation d'équivalence qui identifie les deux diagrammes $A \xrightarrow{f} D \xleftarrow{g} B$ et $A \xrightarrow{u} D' \xleftarrow{v} B$ s'il existe un isomorphisme α de D sur D' tel que $\alpha \circ f = u$ et $\alpha \circ g = v$. Un élément de $\text{Hom}_{\text{coSp}(\mathcal{D})}(A, B)$ sera noté $[A \rightarrow D \leftarrow B]$.
- (iii) la composition est définie comme suit : pour des morphismes $T_1 = [A \rightarrow D \leftarrow B]$ et $T_2 = [B \leftarrow D' \rightarrow C]$, on définit

$$T_2 \circ T_1 = [A \rightarrow D \amalg_B D' \leftarrow C].$$

Dans cette construction, l'existence de sommes amalgamées est essentielle à la définition de la composition des morphismes, or la catégorie \mathcal{E}_q ne possède pas de sommes amalgamées. Pour généraliser la construction de Bénabou, on définit la notion de pseudo-somme amalgamée dans \mathcal{E}_q .

Remarque 1. Pour un élément f de $\text{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, W)$, W se décompose en $f(V) \perp V'$. Les espaces V et $f(V)$ étant isométriques, les espaces W et $V \perp V'$ le sont également. Par conséquent, on écrira dans la suite $f : V \rightarrow W \simeq V \perp V'$.

Définition 2.2. Soient $f : V \rightarrow W \simeq V \perp V'$ et $g : V \rightarrow X \simeq V \perp V''$ des morphismes de \mathcal{E}_q , la pseudo-somme amalgamée de f et g est l'objet, unique à isométrie près, $X \perp_V W \simeq V \perp V' \perp V''$ de \mathcal{E}_q .

Proposition 2.3. Il existe des morphismes $h : W \rightarrow X \perp_V W$ et $k : X \rightarrow X \perp_V W$ de \mathcal{E}_q tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \simeq V \perp V' \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ X \simeq V \perp V'' & \xrightarrow{k} & X \perp_V W \simeq V \perp V' \perp V'' \end{array}$$

Remarque 2. La pseudo-somme amalgamée ne vérifie pas la propriété d'universalité.

En s'inspirant des travaux de Bénabou, on définit la catégorie suivante :

Définition 2.4. La catégorie \mathcal{T}_q est la catégorie dont les objets sont ceux de \mathcal{E}_q et, pour deux objets V et W de \mathcal{T}_q , $\text{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des diagrammes dans \mathcal{E}_q de la forme : $V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W$ pour la relation d'équivalence engendrée par la relation \mathcal{R} suivante :

$V \xrightarrow{f} X_1 \xleftarrow{g} W \xrightarrow{\mathcal{R}} V \xrightarrow{u} X_2 \xleftarrow{v} W$ s'il existe un morphisme α de \mathcal{E}_q tel que $\alpha \circ f = u$ et $\alpha \circ g = v$. La composition est définie à l'aide de la pseudo-somme amalgamée.

Pour un morphisme $f : V \rightarrow W$ de la catégorie \mathcal{E}_q , il découle de la définition précédente que l'élément $[W \xrightarrow{\text{Id}} W \xleftarrow{f} V]$ est une rétraction de $[V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\text{Id}} W]$.

La catégorie \mathcal{T}_q nous permet de donner la définition de la catégorie \mathcal{F}_{quad} suivante.

Définition 2.5. La catégorie \mathcal{F}_{quad} est la catégorie des foncteurs de \mathcal{T}_q dans \mathcal{E} .

Théorème 2.6.

- (i) La catégorie \mathcal{F}_{quad} est abélienne, munie d'un produit tensoriel et d'un foncteur dualité et a suffisamment de projectifs et d'injectifs.
- (ii) Pour V un objet de \mathcal{T}_q , le foncteur $P_V = \mathbb{F}_2[\text{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, -)]$ est un objet projectif vérifiant :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V, F) \simeq F(V)$$

pour tout foncteur F de \mathcal{F}_{quad} . L'ensemble des foncteurs $\{P_V \mid V \in \mathcal{S}\}$ est un ensemble de générateurs projectifs de \mathcal{F}_{quad} , où \mathcal{S} est un ensemble de représentants des classes d'isométrie des objets de \mathcal{T}_q .

La structure des projectifs et l'isomorphisme naturel, donnés au deuxième point, sont des résultats classiques sur les catégories de foncteurs qui découlent du lemme de Yoneda.

3. Quelques résultats concernant les objets simples de \mathcal{F}_{quad}

Un objet F non nul de \mathcal{F}_{quad} est simple si ses seuls sous-foncteurs sont le foncteur nul et lui-même.

3.1. Lien entre \mathcal{F} et \mathcal{F}_{quad}

On note $\mathcal{O} : \mathcal{E}_q \rightarrow \mathcal{E}^f$ le foncteur qui oublie la forme quadratique.

Définition 3.1. Il existe un foncteur $\epsilon : \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{E}^f$ défini par : $\epsilon(V) = \mathcal{O}(V)$ et $\epsilon([V \xrightarrow{f} W \perp W' \xleftarrow{g} W]) = p_g \circ \mathcal{O}(f)$ où p_g est la projection orthogonale de $W \perp W'$ sur W .

Le foncteur ϵ permet de relier la catégorie \mathcal{F}_{quad} à la catégorie \mathcal{F} dans le théorème suivant.

Théorème 3.2. Il existe un foncteur $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$, défini par $\iota(F) = F \circ \epsilon$, exact, pleinement fidèle et préservant les simples.

Ce théorème fournit une première famille de foncteurs simples de \mathcal{F}_{quad} .

3.2. Les foncteurs isotropes et la catégorie \mathcal{F}_{iso}

La définition des foncteurs isotropes de \mathcal{F}_{quad} nécessite l'introduction de la catégorie suivante.

Définition 3.3. Soit $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$ la catégorie dont les objets sont les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une forme quadratique (éventuellement dégénérée), et dont les morphismes sont les *monomorphismes* linéaires qui conservent la forme quadratique.

La proposition suivante montre une des différences fondamentales entre \mathcal{E}_q et $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$.

Proposition 3.4. La catégorie $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$ admet des produits fibrés.

Bénabou donne dans [1] la définition duale de 2.1 suivante.

Définition 3.5. Soit \mathcal{D} une catégorie admettant des produits fibrés. La catégorie $\text{Sp}(\mathcal{D})$ des 'spans' de \mathcal{D} est définie par : $\text{Sp}(\mathcal{D}) \simeq \text{coSp}(\mathcal{D}^{\text{op}})$.

Ceci nous permet de définir la catégorie suivante :

Définition 3.6. La catégorie \mathcal{F}_{iso} est la catégorie des foncteurs de $\text{Sp}(\mathcal{E}_q^{\text{deg}})$ dans \mathcal{E} .

Cette catégorie \mathcal{F}_{iso} est reliée à la catégorie \mathcal{F}_{quad} par le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.7. Il existe un foncteur $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$ exact, fidèle et préservant les simples.

On définit les foncteurs isotropes de \mathcal{F}_{iso} .

Proposition 3.8. Soit H un objet de $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$, les conditions suivantes définissent un objet $iso_H : \text{Sp}(\mathcal{E}_q^{\text{deg}}) \rightarrow \mathcal{E}$ de \mathcal{F}_{iso} .

- (i) Sur les objets : $iso_H(V) = \mathbb{F}_2[\text{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\text{deg}}}(H, V)]$ pour V un objet de $\text{Sp}(\mathcal{E}_q^{\text{deg}})$;
- (ii) sur les morphismes : pour un morphisme $[V \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} W]$ de $\text{Hom}_{\text{Sp}(\mathcal{E}_q^{\text{deg}})}(V, W)$ et un générateur canonique $[h]$ de $iso_H(V)$, on considère le diagramme suivant dans $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$:

$$\begin{array}{ccc} & D & \xrightarrow{g} W \\ & \downarrow f & \\ H & \xrightarrow{h} & V \end{array}$$

- si le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$ du diagramme de gauche est H , ceci fournit un unique morphisme de H dans D de $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$, noté h' tel que $h = f \circ h'$. Dans ce cas, on pose :

$$iso_H([V \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} W]) = [g \circ h'] ;$$

- sinon, on pose : $iso_H([V \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} W]) = 0$.

Les foncteurs simples de \mathcal{F}_{iso} sont classifiés par le théorème suivant, où on note $O(V)$ le groupe orthogonal de l'espace quadratique V .

Théorème 3.9. Pour V un objet de $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$, le foncteur $F_V : \mathbb{F}_2[O(V)] - \text{mod} \rightarrow \mathcal{F}_{iso}$ défini par $F_V(M) = iso_V \otimes_{\mathbb{F}_2[O(V)]} M$, pour M un $\mathbb{F}_2[O(V)]$ -module à gauche, vérifie les propriétés suivantes : (i) le foncteur F_V est exact ; (ii) si M est un $\mathbb{F}_2[O(V)]$ -module simple, alors $F_V(M)$ est un objet simple de \mathcal{F}_{iso} .

Le deuxième point de ce théorème est fondamental et est très particulier à la catégorie \mathcal{F}_{iso} . On note $Iso_V = \kappa(iso_V)$. Soit (x, ε) l'espace quadratique de dimension 1 engendré par x tel que $q(x) = \varepsilon$, pour ε un élément de $\{0, 1\}$; on déduit du fait que les groupes orthogonaux $O(x, 0)$ et $O(x, 1)$ sont triviaux, le corollaire suivant.

Corollaire 3.10. Les foncteurs isotropes $Iso_{(x,0)}$ et $Iso_{(x,1)}$ sont des objets simples de \mathcal{F}_{quad} .

En considérant les deux espaces quadratiques non dégénérés de dimension deux non isométriques, H_0 et H_1 , pour lesquels on a $O(H_0) = S_2$ et $O(H_1) = S_3$, on obtient :

Corollaire 3.11.

- (i) Le foncteur Iso_{H_0} est indécomposable et on a la suite exacte courte non scindée :

$$0 \rightarrow R_{H_0} \rightarrow Iso_{H_0} \rightarrow R_{H_0} \rightarrow 0$$

où R_{H_0} est le foncteur simple obtenu à partir de la représentation triviale de $O(H_0)$.

- (ii) Le foncteur Iso_{H_1} se décompose sous la forme :

$$Iso_{H_1} = F_{H_1} \oplus S_{H_1} \oplus S_{H_1}$$

où S_{H_1} est le foncteur simple correspondant à la représentation naturelle de $O(H_1)$ sur H_1 et où F_{H_1} est un foncteur indécomposable pour lequel on a la suite exacte courte non scindée :

$$0 \rightarrow R_{H_1} \rightarrow F_{H_1} \rightarrow R_{H_1} \rightarrow 0$$

où R_{H_1} est le foncteur simple obtenu à partir de la représentation triviale de $O(H_1)$.

3.3. Décomposition des projectifs P_{H_0} et P_{H_1}

Une des méthodes classiques pour obtenir une classification des objets simples d'une catégorie est d'en décomposer les générateurs projectifs. Dans ce but, on définit la filtration par le rang des générateurs projectifs de la manière suivante.

Définition 3.12. Un morphisme $[V \rightarrow X \leftarrow W]$ est de rang inférieur ou égal à i si le produit fibré du diagramme correspondant dans $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}$ est un espace de dimension inférieure ou égale à i .

On note $\text{Hom}_{\mathcal{T}_q}^{(i)}(V, W)$ l'ensemble des morphismes de V dans W de rang inférieur ou égal à i . On a :

Proposition 3.13. Pour W un objet de \mathcal{T}_q , le sous-espace vectoriel de $P_V(W)$ $P_V^{(i)}(W) = \mathbb{F}_2[\text{Hom}_{\mathcal{T}_q}^{(i)}(V, W)]$ définit un sous-foncteur de P_V .

On vérifie facilement que les foncteurs $P_V^{(i)}$ pour $i = 0, \dots, \dim(V)$ définissent une filtration croissante du foncteur P_V . Dans [4] on obtient les décompositions des deux premiers générateurs projectifs de \mathcal{F}_{quad} donnés au Théorème 2.6 en montrant, explicitement, que la filtration par le rang se scinde dans ce cas. On note $P_V^{\mathcal{F}}$, pour V un objet de \mathcal{E}^f , le projectif de \mathcal{F} obtenu par le lemme de Yoneda.

Théorème 3.14. [4] Les foncteurs projectifs P_{H_0} et P_{H_1} admettent les décompositions en somme directe suivantes :

$$P_{H_0} = \iota(P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}^{\mathcal{F}}) \oplus (\text{Mix}_{0,1}^{\oplus 2} \oplus \text{Mix}_{1,1}) \oplus \text{Iso}_{H_0}, \quad P_{H_1} = \iota(P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}^{\mathcal{F}}) \oplus \text{Mix}_{1,1}^{\oplus 3} \oplus \text{Iso}_{H_1}$$

où $\text{Mix}_{0,1}$ et $\text{Mix}_{1,1}$ sont deux foncteurs mixtes ; Iso_{H_0} et Iso_{H_1} sont des foncteurs isotropes.

Les foncteurs $\text{Mix}_{0,1}$ et $\text{Mix}_{1,1}$ sont deux éléments d'une nouvelle famille de foncteurs qui ne sont ni des objets de \mathcal{F} , ni des objets de \mathcal{F}_{iso} . On a le résultat suivant.

Proposition 3.15. Le foncteur $\text{Mix}_{0,1}$ (respectivement $\text{Mix}_{1,1}$) est isomorphe à un sous-foncteur de $\iota(P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}^{\mathcal{F}}) \otimes \text{Iso}_{(x,0)}$ (respectivement $\iota(P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}^{\mathcal{F}}) \otimes \text{Iso}_{(x,1)}$) où ι est le foncteur défini au Théorème 3.2 et $\text{Iso}_{(x,0)}$ et $\text{Iso}_{(x,1)}$ sont les deux foncteurs considérés au Corollaire 3.10.

On montre que les foncteurs $\text{Mix}_{0,1}$ et $\text{Mix}_{1,1}$ sont indécomposables et leurs facteurs de composition fournissent deux familles infinies de nouveaux foncteurs simples de \mathcal{F}_{quad} notés (L_0^n) et (L_1^n) qui sont, respectivement, des sous-foncteurs de $\iota(\Lambda^n) \otimes \text{Iso}_{(x,0)}$ et $\iota(\Lambda^n) \otimes \text{Iso}_{(x,1)}$ où Λ^n désigne la n -ième puissance extérieure.

On déduit de 3.14 et 3.11 la classification suivante des « petits » foncteurs simples de \mathcal{F}_{quad} :

Proposition 3.16. Les classes d'isomorphisme de foncteurs simples de \mathcal{F}_{quad} qui sont non nuls sur au moins un des espaces H_0 ou H_1 sont :

$$\iota(\mathbb{F}_2), \iota(\Lambda^1), \iota(\Lambda^2), \iota(S_{(2,1)}), \text{Iso}_{(x,0)}, \text{Iso}_{(x,1)}, R_{H_0}, R_{H_1}, S_{H_1}$$

où R_{H_0} , R_{H_1} et S_{H_1} sont les foncteurs simples introduits au Corollaire 3.11 et où le foncteur $S_{(2,1)}$ est défini par $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \simeq S_{(2,1)} \oplus \Lambda^3$.

Références

- [1] J. Bénabou, Introduction to bicategories, in: Reports of the Midwest Category Seminar, Springer, Berlin, 1967, pp. 1–77.
- [2] V. Franjou, E.M. Friedlander, T. Pirashvili, L. Schwartz, Rational Representations, The Steenrod Algebra and Functor Homology, Panoramas et Synthèses (Panoramas and Syntheses), vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, ISBN 2-85629-159-7, 2003, xxii+132 pp.
- [3] V. Franjou, E.M. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. (2) 150 (2) (1999) 663–728.
- [4] C. Vespa, La catégorie \mathcal{F}_{quad} des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur \mathbb{F}_2 , Thèse de Doctorat, <http://www.math.univ-paris13.fr/~vespa/>.