



Statistique

Algorithme RLS en deux étapes pour l'estimation d'un modèle ARCH

Abdelhakim Aknouche, Hafida Guerbyenne

Université des sciences et de la technologie U.S.T.H.B., 16111 Alger, Algérie

Reçu le 21 avril 2005 ; accepté après révision 5 septembre 2006

Disponible sur Internet le 18 octobre 2006

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

L'objectif de cette Note est, d'une part l'élaboration d'une méthode récursive en deux étapes, pour l'estimation des modèles *ARCH*, et, d'autre part, l'analyse des propriétés statistiques des estimateurs fournis par cette méthode. Nous montrons que ces estimateurs sont asymptotiquement gaussiens et que, de plus, l'estimateur de la deuxième étape est asymptotiquement efficace.

Pour citer cet article : A. Aknouche, H. Guerbyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006)*.

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Two-stage RLS algorithm for estimating ARCH models. The aim of this Note is, on the one hand, the development of a recursive method, in two stages, for estimating *ARCH* models, and, on the other hand, the analysis of the statistical properties of the estimators provided by this method. We show that these estimators are asymptotically Gaussian and that the estimator of the second stage is asymptotically efficient. **To cite this article:** A. Aknouche, H. Guerbyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006)*.

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Existing estimation methods for *ARCH* models (see e.g. Francq and Zakoïan, [4]) are based on a beforehand fixed sample size, thereby ignoring the sequential nature of certain data, in particular the financial ones which are observed on a high-frequency basis and so, are progressively updated in real time. This Note develops a recursive on-line estimation algorithm for estimating *ARCH* processes using the regression representation. The basic method of the proposed algorithm is based on a two-stage scheme.

Consider an *ARCH*(q) process written in a regression representation (see Eq. (2)). Bose and Mukherjee [1] have developed a two-stage least squares method for estimating the *ARCH* parameters by solving two sets of linear equations. Moreover, they have studied the asymptotic properties of $\tilde{\alpha}(N)$ and $\hat{\alpha}(N)$ (see Eq. (3)) and shown that the latter estimator is asymptotically efficient (under the Gaussian assumption) and performs better than the quasi-maximum

Adresse e-mail : d73hakim@yahoo.fr (A. Aknouche).

likelihood estimator even for small time series. Our aim is to propose recursive solutions of Eq. (3) which invoke real-time data and have the same suitable statistical properties as those of $(\tilde{\alpha}(N), \hat{\alpha}(N))$.

Since the pre-estimator $\tilde{\alpha}(N)$ given by (3a) has a standard ordinary least squares (*OLS*) form, it can be obtained recursively via the well-known recursive least squares method (Plackett, [8]). This is given by Eq. (4a). Unfortunately, (3b) cannot be solved recursively similarly to (3a) because of the presence of $\tilde{\alpha}(N)$ in the weights $h_k^{-2}(\tilde{\alpha}(N))$, $k = 1, \dots, N$. Nevertheless, we can slightly modify Eq. (3b) to obtain an adequate form for a recursive resolving method, without altering the asymptotic properties. So, we propose the modified equation given by Eq. (5).

Thus, the *ARCH* parameters can be recursively estimated by our proposed method (called two-stage *RLS*, *2S-RLS*) which we derive along two stages (see Eq. (6)). In the first one we obtain a preliminary recursive estimate $\tilde{\alpha}_t$, which corresponds to a recursive least squares solution of (3a) when ignoring the conditional heteroskedasticity of the model innovations. This preliminary estimation is then used in the second stage to obtain the main recursive (weighted) least squares (*WLS*) estimator $\hat{\alpha}_t$, which takes into account the conditional heteroskedasticity by means of the weights $h_t^{-2}(\tilde{\alpha}_t)$.

The second part of this Note analyzes the asymptotic distribution of the recursive estimators given by (6). Under the strict stationarity assumption (see H1) and the fourth moment condition (see H2), it is shown in (7) that $\tilde{\alpha}_t$ is asymptotically Gaussian. If in addition H3 holds, the main estimator $\hat{\alpha}_t$ is also shown to be asymptotically Gaussian (see Eq. (8)) but with a lower covariance matrix, which is, under the conditional normality assumption, equal to the Rao–Cramer bound.

The proposed method, inspired from the automatic control literature, parallels the one available for standard linear models and give under general conditions consistent and asymptotically Gaussian estimators. This can be also applied to off-line data for which it guarantee a good monitoring of estimates, in order to lie inside the stability and positivity regions. Moreover, it can be easily adapted to more general models such as *GARCH* models. Of course, it is clear that the moment assumption H3 appears constraining but this can be a starting point for possible improvements.

1. Introduction

Les modèles *ARCH* (Engle [3]) et leurs extensions jouent un rôle prédominant parmi les diverses formulations proposées pour représenter les séries économiques, notamment les séries financières. De nos jours, de telles séries (cours boursiers, taux de change, ...) présentent une dynamique similaire à celle des données rencontrées dans les domaines du contrôle adaptatif et du traitement de signal, dans le sens où elles tendent à être progressivement disponibles (en-ligne) à des intervalles de temps très courts. Ainsi, l'emploi de méthodes d'estimation qui supportent des observations de taille fixe (hors-ligne) peut s'avérer trop lourd. L'objet du présent travail est la mise en oeuvre d'un algorithme récurrent pour l'estimation, en deux étapes, d'un modèle *ARCH*. Cette méthode, inspirée des algorithmes bien connus d'estimation en-ligne (par exemple Ljung et Söderström [6], Duflo [2]), fournit des estimateurs asymptotiquement gaussiens et permet de prendre en charge le caractère nouvellement en-ligne des données économétriques. Il s'agit, en fait, d'une fusion de la méthode des moindres carrés en deux étapes proposée par Bose et Mukherjee [1] à taille d'échantillon fixée (voir aussi Pantula [9] pour le cas particulier *ARCH* d'ordre un), avec la célèbre méthode des moindres carrés récursive (*RLS* en anglais) développée pour des modèles *AR* linéaires et permettant de prendre en charge des données en temps réel.

Le reste de cette Note est organisé comme suit. La Section 2 donne une rétrospective succincte des modèles *ARCH* ainsi que les hypothèses sur lesquelles se base cette Note. La Section 3 est consacrée d'une part, à la mise en oeuvre d'un algorithme *RLS* en deux étapes pour l'estimation des paramètres d'un modèle *ARCH* et, d'autre part, à l'obtention de la distribution asymptotique des estimateurs obtenus par cet algorithme.

2. Modèle et hypothèses

Un processus du second ordre $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation *ARCH* d'ordre q s'il est solution d'une équation aux différences stochastique de la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sqrt{h_t} \zeta_t, \\ h_t = \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1)$$

où $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité centrée réduite (*i.i.d.*) et de moments d'ordre quatre finis; le polynôme $\alpha(L)$ est donné par : $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i$, où L est l'opérateur

retard. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, ζ_t est indépendante de la tribu \mathcal{F}_{t-1} engendrée par les variables $\{\varepsilon_s, s < t\}$. Ainsi $E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$, i.e. ε_t est une différence de martingales et $h_t = E(\varepsilon_t^2/\mathcal{F}_{t-1})$ est la variance conditionnelle de ε_t sachant \mathcal{F}_{t-1} . Pour la condition de positivité de la variance conditionnelle, les paramètres réels α_i sont tels que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$. Posons $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t = h_t \eta_t$, où $\eta_t = \zeta_t^2 - 1$; nous pouvons donner une représentation équivalente au modèle (1) en l'écrivant sous une forme de régression linéaire dans laquelle le carré du processus ε_t^2 , $t \in \mathbb{Z}$ est la variable à expliquer.

$$\varepsilon_t^2 = \xi_t' \alpha + h_t(\alpha) \eta_t, \tag{2}$$

où $\xi_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2)'$, $h_t(\alpha) = \xi_t' \alpha$ et $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)'$ de dimension $(q + 1) \times 1$ est le vecteur des paramètres du modèle. Considérons les hypothèses suivantes : H1 : Le processus $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est strictement stationnaire et ergodique. H2 : Les moments $E(\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2)$ existent et sont finis pour tout i, j . H3 : Les moments $E(\varepsilon_i^4 \varepsilon_j^4)$ sont finis pour tout i, j, k .

Pour le cas hors-ligne, Bose et Mukherjee [1] ont considéré l'hypothèse H2 pour la normalité asymptotique de l'estimateur de la première étape et l'hypothèse d'existence des moments d'ordre huit pour la normalité de l'estimateur d'intérêt. Dans notre cas, H3 est exigée pour l'efficacité asymptotique de l'estimateur d'intérêt fourni par la méthode que nous proposons. Comme souligné par un rapporteur anonyme, cette hypothèse, très forte d'ailleurs que celles exigées pour la normalité asymptotique d'autres estimateurs tels que l'estimateur du pseudo maximum de vraisemblance (QMLE), induit une restriction sur l'espace des paramètres, et donc nuit à la modélisation des processus à queues épaisses, auxquels sont préconisés les modèles ARCH. Cependant H3 simplifie la preuve et les techniques utilisées pour établir la convergence de l'estimateur QML sans aucune condition sur les moments (voir par exemple Francq et Zakoïan [4]) ne nous semblent pas adaptables à notre problème.

3. Algorithme RLS en deux étapes (2S-RLS)

Posons $\varepsilon^t = \{\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ où la taille t de la série chronologique n'est pas a priori fixée et où les valeurs initiales $\{\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_0\}$ sont, par exemple, supposées connues. Bose et Mukherjee [1] ont proposé une méthode des moindres carrés en deux étapes pour estimer les paramètres du modèle (1) en résolvant les deux systèmes d'équations suivants

$$\tilde{\alpha}(N) = \left(\sum_{k=1}^N \xi_k \xi_k' \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 \xi_k, \tag{3a}$$

$$\hat{\alpha}(N) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{h_k^2(\tilde{\alpha}(N))} \xi_k \xi_k' \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_k^2}{h_k^2(\tilde{\alpha}(N))} \xi_k, \tag{3b}$$

où $\tilde{\alpha}(N)$ est un estimateur préliminaire de α et $\hat{\alpha}(N)$ est l'estimateur d'intérêt, tous deux fondés sur un échantillon d'observations de taille N . Ils ont étudié la distribution asymptotique de $\tilde{\alpha}(N)$ et $\hat{\alpha}(N)$ et ont montré que ces estimateurs sont asymptotiquement gaussiens et que, de plus, sous l'hypothèse d'existence des moments d'ordre huit, l'estimateur d'intérêt $\hat{\alpha}(N)$ est asymptotiquement efficace et sa performance est supérieure à celle de l'estimateur du pseudo-maximum de vraisemblance, même pour de petits échantillons.

Dans cette Note nous proposons une alternative récursive à (3b) qui permette de prendre en charge des données en temps réel ε^t et pour laquelle les estimateurs obtenus possèdent les mêmes propriétés asymptotiques que le couple $(\tilde{\alpha}(N), \hat{\alpha}(N))$. Notons que l'estimateur préliminaire $\tilde{\alpha}(N)$ donné dans (3a) présente une forme OLS standard et peut être obtenu de façon récursive. En effet, en posant $\tilde{R}_t = \sum_{k=1}^t \xi_k \xi_k'$ et $\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}(t)$, le système (3a) peut être résolu de façon récursive en utilisant la méthode, bien connue, des moindres carrés récursifs (RLS) (par exemple Ljung et Söderström [6, p. 17]), qui permet d'obtenir les équations recurrentes suivantes

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}_{t-1} + \tilde{R}_t^{-1} \xi_t (\varepsilon_t^2 - \xi_t' \tilde{\alpha}_{t-1}), \\ \tilde{R}_t = \tilde{R}_{t-1} + \xi_t \xi_t', \end{cases} \quad t \geq 2, \tag{4a}$$

où $\tilde{R}_1 = \xi_1 \xi_1'$ et $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{R}_1^{-1} \xi_1 \varepsilon_1^2$ sont des valeurs initiales et l'on suppose que \tilde{R}_1 est non singulière. Seulement, (3b) ne peut être obtenue de façon récursive comme (3a) en raison de la présence de $\tilde{\alpha}(N)$ dans les poids $h_k^{-2}(\tilde{\alpha}(N))$,

$k = 1, \dots, N$. Cependant, il est possible de modifier l'équation (3b) afin d'obtenir une forme adéquate qui se prête à une méthode de résolution récursive, tout en garantissant la même distribution asymptotique de l'estimateur hors-ligne d'intérêt $\hat{\alpha}(N)$. Ainsi nous proposons l'équation modifiée suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^t \frac{1}{h_k^2(\tilde{\alpha}_k)} \xi_k \xi_k' \right) \hat{\alpha}_t = \sum_{k=1}^t \frac{\varepsilon_k^2}{h_k^2(\tilde{\alpha}_k)} \xi_k, \quad (5)$$

dans laquelle les poids $h_k^{-2}(\tilde{\alpha}(N))$ sont remplacés par $h_k^{-2}(\tilde{\alpha}_k)$, $\hat{\alpha}_k$ étant l'estimateur récursif d'intérêt du paramètre α au temps k . Il est clair que (3b) et (5) fournissent des estimateurs différents. Cependant, ils possèdent, comme nous le montrons ci-dessous, les mêmes propriétés asymptotiques. Il est maintenant possible de résoudre (5) de façon récursive en posant $\hat{R}_t = \sum_{k=1}^t \frac{1}{h_k^2(\tilde{\alpha}_k)} \xi_k \xi_k'$. On obtient les équations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \frac{\hat{R}_t^{-1} \xi_t (\varepsilon_t^2 - \xi_t' \hat{\alpha}_{t-1})}{(\xi_t' \tilde{\alpha}_t)^2}, \\ \hat{R}_t = \hat{R}_{t-1} + \frac{\xi_t \xi_t'}{(\xi_t' \tilde{\alpha}_t)^2}, \end{cases} \quad t \geq 2, \quad (4b)$$

avec valeurs de démarrage $\hat{R}_1 = \frac{1}{h_1^2(\tilde{\alpha}_1)} \xi_1 \xi_1'$ et $\hat{\alpha}_1 = \hat{R}_1^{-1} \xi_1 \frac{\varepsilon_1^2}{h_1^2(\tilde{\alpha}_1)}$, pourvu que \hat{R}_1 soit non singulière. Il est encore possible d'améliorer à nouveau la complexité algorithmique de (4) en évitant d'inverser les matrices \tilde{R}_t et \hat{R}_t . Ceci peut être atteint en utilisant, dans le système d'équations (4) le lemme, bien connu, d'inversion matricielle (par exemple Plackett [8], Solo [10], Ljung et Söderström [6]). Ainsi, nous obtenons l'algorithme suivant que nous nommerons l'algorithme des moindres carrés récursif en deux étapes (2S-RLS).

Algorithme 3.1. L'algorithme (2S-RLS) pour estimer les paramètres d'un modèle ARCH est donné par le système d'équations récurrentes suivant :

$$\underbrace{\begin{cases} \tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}_{t-1} + \frac{\tilde{P}_{t-1} \xi_t (\varepsilon_t^2 - \xi_t' \tilde{\alpha}_{t-1})}{1 + \xi_t' \tilde{P}_{t-1} \xi_t}, \tilde{\alpha}_0 = 0, \\ \tilde{P}_t = \tilde{P}_{t-1} - \frac{\tilde{P}_{t-1} \xi_t \xi_t' \tilde{P}_{t-1}}{1 + \xi_t' \tilde{P}_{t-1} \xi_t}, \tilde{P}_0 = M.I., \end{cases}}_{\text{première étape}} \rightarrow \underbrace{\begin{cases} \hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \frac{\hat{P}_{t-1} \xi_t (\varepsilon_t^2 - \xi_t' \hat{\alpha}_{t-1})}{(\xi_t' \tilde{\alpha}_t)^2 + \xi_t' \hat{P}_{t-1} \xi_t}, \hat{\alpha}_0 = 0, \\ \hat{P}_t = \hat{P}_{t-1} - \frac{\hat{P}_{t-1} \xi_t \xi_t' \hat{P}_{t-1}}{(\xi_t' \tilde{\alpha}_t)^2 + \xi_t' \hat{P}_{t-1} \xi_t}, \hat{P}_0 = M.I., \end{cases}}_{\text{seconde étape}} \quad (6)$$

où $\tilde{P}_t = \tilde{R}_t^{-1}$, $\hat{P}_t = \hat{R}_t^{-1}$ et M est un nombre réel positif suffisamment grand.

Les valeurs de démarrage de l'algorithme $\tilde{\alpha}_0$, \tilde{P}_0 , $\hat{\alpha}_0$ et \hat{P}_0 ont été fixées, d'une part de façon à éviter le problème de singularité pour les deux matrices \tilde{R}_1 et \hat{R}_1 et d'autre part pour obtenir des estimateurs qui soient proches des solutions de (3a) et (5). Dans ce qui suit, nous donnons la distribution asymptotique des estimateurs obtenus par (6) sous les hypothèses H1–H3.

Théorème 3.2. (i) Sous les hypothèses H1 et H2

$$t^{1/2}(\tilde{\alpha}_t - \alpha^*) \xrightarrow{L} N(0, \text{var}(\eta_0^2) \{E(\xi_0 \xi_0')\}^{-1} E(\xi_0 \xi_0' (\xi_0' \alpha^*)^2) \{E(\xi_0 \xi_0')\}^{-1}). \quad (7)$$

(ii) Si, de plus, H3 est vérifiée alors

$$t^{1/2}(\hat{\alpha}_t - \alpha^*) \xrightarrow{L} N(0, \text{var}(\eta_0^2) \{E(\xi_0 \xi_0' (\xi_0' \alpha^*)^{-2})\}^{-1}). \quad (8)$$

Preuve. Notons que, puisque $\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}(t)$, (7) résulte directement, sous H1 et H2, de Bose et Mukherjee [1]. Pour montrer (8), nous pouvons écrire à partir de (5) et (2)

$$t^{1/2}(\hat{\alpha}_t - \alpha^*) = \left[t^{-1} \sum_{k=1}^t \frac{\xi_k \xi_k'}{(\xi_k' \tilde{\alpha}_k)^2} \right]^{-1} \left[t^{-1/2} \sum_{k=1}^t \frac{(\xi_k' \alpha^*) \eta_k}{(\xi_k' \tilde{\alpha}_k)^2} \xi_k \right], \quad (9)$$

où α est remplacé par α^* la vraie valeur du paramètre. Comme dans Bose et Mukherjee [1], pour établir (8), il suffit de montrer que

$$t^{-1} \sum_{k=1}^t \left(\frac{1}{(\xi'_k \tilde{\alpha}_k)^2} - \frac{1}{(\xi'_k \alpha^*)^2} \right) \xi_k \xi'_k = o_p(1), \tag{10a}$$

$$t^{-1/2} \sum_{k=1}^t \left(\frac{1}{(\xi'_k \tilde{\alpha}_{k-1})^2} - \frac{1}{(\xi'_k \alpha^*)^2} \right) (\xi'_k \alpha^*) \eta_k \xi_k = o_p(1), \tag{10b}$$

pour pouvoir réécrire (9) comme suit

$$t^{1/2}(\hat{\alpha}_t - \alpha^*) = \left[t^{-1} \sum_{k=1}^t \frac{\xi_k \xi'_k}{(\xi'_k \alpha^*)^2} \right]^{-1} \left[t^{-1/2} \sum_{k=1}^t \frac{(\xi'_k \alpha^*) \eta_k}{(\xi'_k \alpha^*)^2} \xi_k \right] + o_p(1), \tag{11}$$

et, d'après le théorème central limite des martingales (Hall et Heyde [5], chapitre 3) qui est facilement applicable à (11), (Bose et Mukherjee [1]) nous concluons que (8) est vraie. Maintenant pour prouver (10a), en utilisant le théorème de la valeur moyenne (Bose et Mukherjee [1, formule (15), p. 133]), nous avons

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \left(\frac{1}{(\xi'_k \tilde{\alpha}_k)^2} - \frac{1}{(\xi'_k \alpha^*)^2} \right) \xi_k \xi'_k = -\frac{2}{t} \sum_{k=1}^t \frac{(\tilde{\alpha}_k - \alpha^*)' \xi_k}{\chi_k^3} \xi_k \xi'_k = -2S_1, \tag{12}$$

la constante χ_k est telle que

$$0 < \frac{1}{\chi_k^3} \leq \frac{1}{(\xi'_k \alpha^*)^3} \left[1 + \frac{\xi'_k \alpha^*}{\xi'_k \tilde{\alpha}_k} \right]^3 \leq \frac{1}{(\xi'_k \alpha^*)^3} \left[1 + \left\{ 1 + \sum_{j=0}^q \frac{\alpha_j^*}{\tilde{\alpha}_j^{(k)}} \right\} \right]^3 \leq (\alpha_0^*)^{-3} \left[2 + \sum_{j=0}^q \frac{\alpha_j^*}{\tilde{\alpha}_j} \right]^3, \tag{13}$$

où dans la première inégalité de (13), nous avons utilisé la relation (17) dans Bose et Mukherjee [1, p. 133]. La borne supérieure de la dernière inégalité est bornée en probabilité, pour tout k , en raison de (7). Soit $C_1 > 0$ une telle borne. Alors de (12) et (13) nous avons $\|S_1\| \leq C_1 t^{-1} \sum_{k=1}^t \|\tilde{\alpha}_k - \alpha^*\| \|\xi_k\|^3$ ($\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne). Puisque à partir de (7) il existe $C_2 > 0$ tel que $k^{1/2} \|\tilde{\alpha}_k - \alpha^*\| \leq C_2$ (en probabilité), sous l'hypothèse d'existence des moments d'ordre six, garantie par H3, il s'en suit que $\sum_{k=1}^\infty k^{-3/2} E(\|\xi_k\|^3) < \infty$, et donc (voir par exemple Lukacs [7, p. 80])

$$\sum_{k=1}^\infty k^{-1} \|\tilde{\alpha}_k - \alpha^*\| \|\xi_k\|^3 < \infty, \quad \text{p.s.} \tag{14}$$

Ainsi (10a) est obtenue à partir de (14) et du lemme de Kronecker.

Pour établir (10b), nous utilisons à nouveau le théorème de la valeur moyenne qui conduit à

$$t^{-1/2} \sum_{k=1}^t \left(\frac{1}{(\xi'_k \tilde{\alpha}_k)^2} - \frac{1}{(\xi'_k \alpha^*)^2} \right) (\xi'_k \alpha^*) \eta_k \xi_k = -2t^{-1/2} \sum_{k=1}^t \frac{((\tilde{\alpha}_k - \alpha^*)' \xi_k) (\xi'_k \alpha^*) \eta_k}{\chi_k^3} \xi_k \stackrel{\text{def}}{=} -2t^{-\delta} S_{t,\delta},$$

pour un certain δ tel que $0 < \delta < 1/2$. Si nous pouvons montrer que $E\|S_{t,\delta}\|^2 < \infty$ alors d'après l'inégalité de Tchebychev, nous aurons $t^{-\delta} \|S_{t,\delta}\| = o_p(1)$, ce qui équivaut à (10b). En utilisant H1 et l'indépendance de la suite (η_k) , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} E(\|S_t\|^2) &\leq t^{-1+2\delta} \sum_{k=1}^t \frac{E\|((\tilde{\alpha}_k - \alpha^*)' \xi_k) (\xi'_k \alpha^*) \xi_k\|^2}{\chi_k^6} E\eta_k^2 \leq C_1^2 t^{-1+2\delta} \sum_{k=1}^t E(C_2^2 \|\alpha^*\|^2 \|\xi_k\|^6) k^{-1} \\ &\leq (C_1^2 C_2^2 \|\alpha^*\|^2 E\|\xi_0\|^6) t^{-1+2\delta} \log t < \infty. \end{aligned}$$

Maintenant (10b) est établie. \square

4. Conclusion

Dans cette Note, nous avons proposé un algorithme récursif, nommé *2S-RLS*, pour estimer les paramètres de modèles *ARCH*. Cette méthode, inspirée des algorithmes d'estimation en-ligne, exclusivement utilisés pour des processus linéaires, s'étend au cas de modèles *ARCH* et donne des estimateurs asymptotiquement gaussiens. Bien entendu, la méthode proposée peut être aussi appliquée à des données hors-ligne sur la base desquelles, elle garantit un bon contrôle des estimations afin de les maintenir dans les régions de positivité et de stationnarité. La performance de l'algorithme *2S-RLS* a été montrée dans une étude de simulation intensive sur de nombreux modèles répondant à la formulation *ARCH* et, cela, pour diverses tailles d'échantillons. Les résultats obtenus ne sont pas reportés dans cette Note. Ainsi, l'algorithme *2S-RLS* est recommandé aussi bien pour sa simplicité et sa précision que pour son caractère séquentiel qui s'adapte aux données en temps réel telles, par exemple, les modèles de données financières en temps continu pour lesquelles les modèles *ARCH* en sont de bonnes approximations. Il est clair que l'hypothèse d'existence des moments d'ordre douze H_3 paraît contraignante mais cela peut être un point de départ pour d'éventuelles améliorations. Des extensions de cet algorithme à des modèles plus généraux tels que les modèles *GARCH* peuvent être développées à l'aide de l'approche pseudo-régression linéaire (voir Solo [10] et Duflo [2]).

Remerciements

Les auteurs sont profondément reconnaissants à deux rapporteurs anonymes pour leurs constructives suggestions qui ont amélioré nettement la qualité de la Note.

Références

- [1] A. Bose, K. Mukherjee, Estimating the *ARCH* parameters by solving linear equations, *J. Time Ser. Anal.* 24 (2003) 127–136.
- [2] M. Duflo, *Méthodes récursives aléatoires : Techniques stochastiques*, Masson, Paris, 1990.
- [3] R.F. Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation, *Econometrica* 50 (1982) 987–1008.
- [4] C. Francq, J.M. Zakoïan, Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes, *Bernoulli* 10 (2004) 605–637.
- [5] P. Hall, C.C. Heyde, *Martingale Limit Theory and its Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [6] L. Ljung, T. Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, MA, 1983.
- [7] E. Lukacs, *Stochastic Convergence*, second ed., Academic Press, New York, 1975.
- [8] R.L. Plackett, Some theorems in least squares, *Biometrika* 32 (1950) 149.
- [9] S.G. Pantula, Estimation of autoregressive models with *ARCH* errors, *Sankhyā* 50 (1988) 119–138.
- [10] V. Solo, The convergence of *AML*, *IEEE Trans. Automat. Control* 24 (1979) 958–963.