

Contrôle optimal

Conditions d'optimalité du second ordre nécessaires ou suffisantes pour les problèmes de commande optimale avec une contrainte sur l'état et une commande scalaires

J. Frédéric Bonnans, Audrey Hermant

INRIA-Futurs et CMAP, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 23 février 2006 ; accepté après révision le 5 septembre 2006

Disponible sur Internet le 5 octobre 2006

Présenté par Alain Bensoussan

Résumé

Dans cette Note, nous étudions un problème de commande optimale avec une commande scalaire et une contrainte sur l'état scalaire d'ordre quelconque. Les instants de jonction sont supposés en nombre fini. Nous obtenons des conditions d'optimalité du second ordre nécessaires ou suffisantes, qui permettent de caractériser la croissance quadratique. **Pour citer cet article :** *J.F. Bonnans, A. Hermant, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

No-gap second-order optimality conditions for optimal control problems with a single state constraint and control. This Note deals with optimal control problems with only one control variable and one state constraint, of arbitrary order. We consider the case of finitely many boundary arcs and touch times. We obtain a no-gap theory of second-order conditions, allowing us to characterize second-order quadratic growth. **To cite this article:** *J.F. Bonnans, A. Hermant, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this Note, we study an optimal control problem (\mathcal{P}) with a single state constraint and control, in abstract form (2). The control and state spaces are respectively $\mathcal{U} := L^\infty(0, T)$ and $\mathcal{Y} := W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}^n)$. The data of the problem ℓ, f, g, ϕ are C^∞ mappings, and the dynamics f is Lipschitz continuous. This ensures that the mapping $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}, u \mapsto y_u$, where y_u is solution of the state equation (1), is C^∞ . So are the cost function $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ and the constraint mapping $G : \mathcal{U} \rightarrow C[0, T]$, where $C[0, T]$ denotes the set of continuous functions over $[0, T]$. The constraint cone K is the set of non-positive continuous functions $C_-[0, T]$. We assume that the initial condition $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfies (A1) $g(y_0) < 0$. We say that $u \in \mathcal{U}$ is a local optimal solution of (\mathcal{P}) satisfying the quadratic growth condition, if (3) holds.

Adresses e-mail : bonnans@cmap.polytechnique.fr (J.F. Bonnans), hermant@cmap.polytechnique.fr (A. Hermant).

The dual of $C[0, T]$ is the set of bounded measures denoted by $\mathcal{M}[0, T]$ and identified with functions of bounded variation $BV(0, T)$ vanishing at zero. The first necessary optimality condition at $u \in G^{-1}(K)$ is given by (5), where L is the *Lagrangian* (4) of problem (\mathcal{P}) and the Lagrange multiplier $\eta \in \mathcal{M}_+[0, T]$ is a bounded non-negative measure, with support in the contact set $I_u := \{t \in [0, T]; g(y_u(t)) = 0\}$.

We may define by induction the functions $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g^{(1)}, \dots, g^{(q)}$ by $g^{(j)}(u, y) = g_y(y)^{(j-1)} f(u, y)$, if we have $g_u^{(j)} \equiv 0$, for all $j = 1, \dots, q-1$. Let $q \geq 1$ be the smallest integer such that $g_u^{(q)} \not\equiv 0$. If q is finite, we say that q is the *order* of the state constraint.

A *boundary* (resp. *interior*) *arc* is a maximal interval of positive measure $\mathcal{I} \subset [0, T]$, such that $g(y_u(t)) = 0$ (resp. $g(y_u(t)) < 0$) for all $t \in \mathcal{I}$. *Entry* and *exit* points are respectively the left and right endpoints of a boundary arc. A *touch point* is an isolated contact point, endpoint of two interior arcs. A touch point is said to be *essential*, if it belongs to the support of the Lagrange multiplier η . Entry, exit and touch points are called *junction points*.

The *Hamiltonian* is defined by (6), and given $(u, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{M}_+[0, T]$, the costate $p_{u,\eta} \in BV(0, T; \mathbb{R}^{n*})$ is defined as the solution of (7).

We make the following hypotheses: (A2) the Hamiltonian is strongly convex with respect to the control variable, uniformly w.r.t. time, that is (8) is satisfied; (A3) the state constraint is of order q and satisfies (9); (A4) the trajectory (u, y_u) has *finitely many junction points*, and $g(y_u(T)) < 0$; (A5) the junction points satisfy (10) where \hat{q} equals $2q-1$ if q is odd and $2q-2$ if q is even; (A6) the *strict complementarity on boundary arcs* (11) holds.

If (u, η) satisfies the first order necessary condition (5) and assumptions (A2)–(A4), then it was shown in [4,7] that the control and multiplier are smooth functions on the interior of arcs, and that the control and some of its time derivatives are continuous at junction points. More precisely, $u, \dots, u^{(q-2)}$ are continuous at junction times, and in addition, if the order q of the state constraint is *odd*, $u^{(q-1)}$ and η are continuous at entry/exit points. If $q = 1$, \dot{u} and η are also continuous at touch points, which means that *first-order state constraints do not have essential touch points*.

Let us recall that the derivative of the mapping $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, $u \mapsto y_u$ is the mapping $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, $v \mapsto z_{u,v}$, where $z_{u,v}$ is solution of the linearized state equation (12). The latter has a continuous extension over $L^2(0, T)$. The critical cone $C(u) = C_\infty(u)$ and its extension $C_2(u)$ in $L^2(0, T)$, are defined by (13). Our main result is the following:

Theorem 0.1.

- (i) Let u be a local optimal solution of (\mathcal{P}) satisfying (A1)–(A6), with its unique Lagrange multiplier η . Denote by $\mathcal{T}_u^{\text{ess}}$ the (finite) set of essential touch points of the trajectory (u, y_u) . Then:

$$D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v) - \sum_{\tau \in \mathcal{T}_u^{\text{ess}}} \frac{(g_y^{(1)}(y_u(\tau))z_{u,v}(\tau))^2}{\frac{d^2}{dt^2} g(y_u)|_{t=\tau}} [\eta(\tau)] \geq 0 \quad \forall v \in C_2(u).$$

- (ii) Let $(u, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{M}_+[0, T]$ satisfying (5) and (A1)–(A6). Then u is a local optimal solution of (\mathcal{P}) satisfying the quadratic growth condition (3), if and only if:

$$D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v) - \sum_{\tau \in \mathcal{T}_u^{\text{ess}}} \frac{(g_y^{(1)}(y_u(\tau))z_{u,v}(\tau))^2}{\frac{d^2}{dt^2} g(y_u)|_{t=\tau}} [\eta(\tau)] > 0 \quad \forall v \in C_2(u) \setminus \{0\}.$$

Here are the main ideas of the proof. We use the abstract second-order necessary condition (18) due to Kawasaki [5]. The latter involves a term taking into account the curvature of the convex set K , the expression of which, when $K = C_-[0, T]$, was obtained in [6] and is given by (19)–(20). Using the results on junction conditions in [4,7], we are able to prove that under assumptions (A1)–(A6), *the contribution of boundary arcs to the curvature term is zero*. It remains, when the state constraint is of order $q \geq 2$, the contribution of *finitely many essential touch points*. We thus obtain that the curvature term is given by (15). The extension in L^2 is obtained by a density argument.

Known second-order sufficient conditions such as (21) do not take into account the curvature term. There is a gap with the necessary condition, when essential touch points are present (which implies that the order of the state constraint is $q \geq 2$). For the latter we use a reduction argument. We extend the idea in [3], where the reduction is C^2 , to minima/maxima of functions in $W^{2,\infty}$. The distributed constraint is locally replaced, around essential touch points, by finitely many inequality constraints. The Hessian of Lagrangian of the corresponding reduced problem has

an additional term that matches the curvature term. We thus obtain a no-gap second-order condition, in the sense that the second-order necessary or sufficient conditions differ only between a strict and a non-strict inequality. The characterization of quadratic growth follows. The proofs and results are developed in [1].

1. Introduction

Soit $\mathcal{U} := L^\infty(0, T)$ (resp. $\mathcal{Y} := W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}^n)$) l'espace de commande (resp. d'état), et soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe C^∞ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$, tels que f est lipschitzienne et (A1) $g(y_0) < 0$. D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, l'application $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, $u \mapsto y_u$ où $y_u \in \mathcal{Y}$ est solution de l'équation d'état

$$\dot{y}_u(t) = f(u(t), y_u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]; \quad y_u(0) = y_0 \tag{1}$$

est de classe C^∞ . On s'intéresse au problème de commande optimale avec contrainte sur l'état :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{u \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \ell(u(t), y_u(t)) dt + \phi(y_u(T)); \quad G(u) := g(y_u) \in K. \tag{2}$$

Les applications J et G sont C^∞ de \mathcal{U} dans respectivement \mathbb{R} et $C[0, T]$, l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$. Le cône des contraintes est $K = C_-[0, T]$, ensemble des fonctions continues négatives.

On dit que u est une solution locale de (\mathcal{P}) satisfaisant la condition de *croissance quadratique*, si

$$\exists \alpha, \rho > 0, \quad J(\tilde{u}) \geq J(u) + \alpha \|\tilde{u} - u\|_2^2, \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{U}; \quad \|\tilde{u} - u\|_\infty \leq \rho, \quad G(\tilde{u}) \in K. \tag{3}$$

2. Hypothèses et résultat principal

On note $\mathcal{M}[0, T]$ l'espace des mesures de Radon, espace dual de $C[0, T]$ identifié aux fonctions à variation bornée $BV(0, T)$ s'annulant en zéro, et $\mathcal{M}_+[0, T]$ le cône des mesures positives.

Soit $I_u := \{t \in [0, T]; g(y_u(t)) = 0\}$ le domaine de contact. Les cônes tangent et normal (au sens de l'analyse convexe) à K au point $G(u) \in K$, sont respectivement donnés par $T_K(G(u)) = \{h \in C[0, T]; h(t) \leq 0 \text{ sur } I_u\}$ et $N_K(G(u)) = \{\eta \in \mathcal{M}_+[0, T]; \text{supp}(\eta) \subset I_u\}$, où $\text{supp}(\eta)$ désigne le support de η ; ces cônes sont vides si $G(u) \notin K$. Le *lagrangien* de (\mathcal{P}) est défini par

$$L : \mathcal{U} \times \mathcal{M}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (u, \eta) \mapsto J(u) + \langle \eta, G(u) \rangle. \tag{4}$$

On dit que $\eta \in \mathcal{M}_+[0, T]$ est un multiplicateur de Lagrange associé à $u \in \mathcal{U}$, si

$$D_u L(u, \eta) = 0; \quad \eta \in N_K(G(u)). \tag{5}$$

Notons \mathbb{R}^{n*} l'ensemble des vecteurs lignes. Le *hamiltonien* est défini par :

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}; \quad (u, y, p) \mapsto \ell(u, y) + pf(u, y). \tag{6}$$

Etant donné $(u, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{M}_+[0, T]$, l'état adjoint $p_{u,\eta} \in BV([0, T]; \mathbb{R}^{n*})$ est solution (unique) de :

$$p_{u,\eta}(t) = \int_t^T H_y(u(s), y_u(s), p_{u,\eta}(s)) ds + \int_t^T g_y(y_u(s)) d\eta(s) + \phi_y(y_u(T)). \tag{7}$$

Comme η et $p_{u,\eta}$ sont à variation bornée, ils ont à chaque instant une limite à gauche et à droite. On note $[\eta(\tau)] = \eta(\tau^+) - \eta(\tau^-) \geq 0$ le saut de η à l'instant $\tau \in [0, T]$, où $\eta(\tau^\pm) = \lim_{t \rightarrow \tau^\pm} \eta(t)$.

On suppose le hamiltonien uniformément fortement convexe par rapport à la variable de commande le long de la trajectoire, au sens où :

$$(A2) \quad \exists \beta > 0, \quad H_{uu}(\hat{u}, y_u(t), p_{u,\eta}(t^\pm)) \geq \beta, \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \text{ et tout } \hat{u} \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Si pour $j = 1, \dots, q - 1$, la fonction $g^{(j)}(u, y) := g_y^{(j-1)}(y)f(u, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est indépendante de u (i.e. $g_u^{(j)} \equiv 0$), on la note $g^{(j)}(y)$ et l'on a $g^{(q)}(u, y) = g_y^{(q-1)}(y)f(u, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Soit $q \geq 1$ le plus petit entier tel que $g_u^{(q)} \neq 0$. Si q est fini, on dit que q est l'ordre de la contrainte, et on dit que cette dernière est régulière, si :

$$(A3) \quad \exists \nu > 0, \quad |g_u^{(q)}(\hat{u}, y_u(t))| \geq \nu, \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \text{ et tout } \hat{u} \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

On remarquera que l'on peut affaiblir (A3) en supposant (9) pour t au voisinage de l'ensemble de contact I_u , et dans la définition de l'ordre, on peut restreindre y à un voisinage dans \mathbb{R}^n de $\{y_u(t); t \in I_u\}$.

Les hypothèses (A1) et (A3) impliquent l'existence et l'unicité du multiplicateur η satisfaisant (5) en une solution locale de (\mathcal{P}).

Un arc frontière (resp. intérieur) de la trajectoire (u, y_u) , est un intervalle maximal non réduit à un point $\mathcal{I} \subset [0, T]$, tel que $g(y_u(t)) = 0$ (resp. $g(y_u(t)) < 0$), pour tout $t \in \mathcal{I}$. On appelle points de jonction les instants de $]0, T[$ extrémités de deux arcs consécutifs. Si $[\tau_e, \tau_s]$ est un arc frontière, τ_e et τ_s sont appelés respectivement points d'entrée et de sortie. Un point de contact isolé (point de jonction à l'extrémité de deux arcs intérieurs) τ est dit essentiel si le multiplicateur de Lagrange η satisfait $[\eta(\tau)] > 0$. L'ensemble des points de jonction (resp. points de contact isolés essentiels) de (u, y_u) est noté $\mathcal{T}_u \subset (0, T)$ (resp. $\mathcal{T}_u^{\text{ess}} \subset \mathcal{T}_u$). On supposera :

$$(A4) \quad \text{L'ensemble des points de jonction } \mathcal{T}_u \text{ est fini et } g(y_u(T)) < 0.$$

Rappelons le résultat suivant, dû à Jacobson et al. [4], dont la preuve a été clarifiée par Maurer [7].

Proposition 2.1 (Conditions de jonction). Soit $(u, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{M}_+[0, T]$ satisfaisant (5) et (A2)–(A4). Alors : sur $[0, T] \setminus \mathcal{T}_u$, u et η sont C^∞ . En un point τ d'entrée ou de sortie, u et ses dérivées jusqu'à l'ordre $q - 2$ sont continues, et si q est impair, alors $u^{(q-1)}$ est continu et $[\eta(\tau)] = 0$. En un point τ de contact isolé, u et ses dérivées jusqu'à l'ordre $q - 2$ sont continues, et si $q = 1$, alors $[\eta(\tau)] = 0$ et \dot{u} est continu (si $q = 1$, il n'y a donc pas de points de contact isolés essentiels).

Soit $\hat{q} = 2q - 1$ si q est impair et $\hat{q} = 2q - 2$ si q est pair. La contrainte est dite non tangentielle, si en tout point d'entrée τ_e , de sortie τ_s et point de contact isolé essentiel τ_c^{ess} , on a :

$$(A5) \quad \text{(i) } (-1)^{\hat{q}+1} \frac{d^{\hat{q}+1}}{dt^{\hat{q}+1}} g(y_u) \Big|_{t=\tau_e^-} < 0; \quad \frac{d^{\hat{q}+1}}{dt^{\hat{q}+1}} g(y_u) \Big|_{t=\tau_s^+} < 0, \quad \text{(ii) } \frac{d^2}{dt^2} g(y_u) \Big|_{t=\tau_c^{\text{ess}}} < 0. \quad (10)$$

Enfin, on fera l'hypothèse de « complémentarité stricte » sur les arcs frontières :

$$(A6) \quad \text{Int } I_u \subset \text{supp}(\eta). \quad (11)$$

La dérivée (Fréchet) au point u de $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, $u \mapsto y_u$ est l'application $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, $v \mapsto z_{u,v}$ où $z_{u,v}$ est solution de l'équation d'état linéarisée

$$\dot{z}_{u,v}(t) = f_y(u(t), y_u(t))z_{u,v}(t) + f_u(u(t), y_u(t))v(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]; \quad z_{u,v}(0) = 0. \quad (12)$$

Les applications qui à v associent $z_{u,v}$, $DG(u)v$, $D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v)$, etc. définies sur $L^\infty(0, T)$, ont une extension unique sur $L^2(0, T)$. Le cône critique est défini par :

$$C_p(u) = \{v \in L^p(0, T); DG(u)v \in T_K(G(u)); DJ(u)v \leq 0\}, \quad p = 2, \infty. \quad (13)$$

On note $C(u) := C_\infty(u)$. Soit $I_{u,v}^2 := \{t \in I_u; g_y(y_u(t))z_{u,v}(t) = 0\}$. Si (u, η) satisfont (5), $v \in C(u)$ ssi

$$g_y(y_u(t))z_{u,v}(t) \leq 0 \quad \forall t \in I_u \quad \text{et} \quad \text{supp}(\eta) \subset I_{u,v}^2. \quad (14)$$

La contribution de la courbure de K à la condition du second ordre a pour expression

$$\sigma_c^{\text{ess}}(u, v; \eta) := \sum_{\tau \in \mathcal{T}_u^{\text{ess}}} \frac{(g_y^{(1)}(y_u(\tau))z_{u,v}(\tau))^2}{\frac{d^2}{dt^2} g(y_u)|_{t=\tau}} [\eta(\tau)]. \quad (15)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal, le hessien du lagrangien pouvant s'exprimer en fonction de $(u, y_u, \eta, p_{u,\eta}, v, z_{u,v})$ et des dérivées secondes de H , g et ϕ .

Théorème 2.2.

(i) Soit u solution locale de (\mathcal{P}) , satisfaisant (A1)–(A6) avec son multiplicateur η . Alors :

$$D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v) - \sigma_c^{\text{ess}}(u, v; \eta) \geq 0 \quad \forall v \in C_2(u). \tag{16}$$

(ii) Soit $(u, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{M}_+[0, T]$ satisfaisant (5) et (A1)–(A6). Alors u est une solution locale de (\mathcal{P}) satisfaisant la croissance quadratique (3), si et seulement si

$$D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v) - \sigma_c^{\text{ess}}(u, v; \eta) > 0 \quad \forall v \in C_2(u) \setminus \{0\}. \tag{17}$$

3. Idée de la démonstration du résultat principal

La condition nécessaire du second ordre s’appuie sur celle obtenue par Kawasaki [5], $T_K^{2,i}$ désignant l’ensemble tangent intérieur du second ordre, voir [2,5] et $\sigma(\eta, S)$ la fonction d’appui de l’ensemble S :

$$D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v) - \sigma(\eta, T_K^{2,i}(G(u), DG(u)v)) \geq 0; \quad \forall v \in C(u). \tag{18}$$

L’expression du terme de courbure lorsque $K = C_-[0, T]$, en $v \in C(u)$, est donnée (voir [6]) par :

$$\sigma(\eta, T_K^{2,i}(G(u), DG(u)v)) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_u \cap I_{u,v}^2} \varsigma_{u,v}(\tau) [\eta(\tau)] \leq 0, \tag{19}$$

avec

$$\varsigma_{u,v}(\tau) = \liminf_{t \rightarrow \tau; g(y_u(t)) < 0} \frac{(\{g_y(y_u(t))z_{u,v}(t)\}_+)^2}{2g(y_u(t))}. \tag{20}$$

En un point τ d’entrée ou de sortie, les dérivées de u jusqu’à l’ordre $\hat{q} - q$ étant continues, les dérivées temporelles de $g(y_u)$ le sont jusqu’à l’ordre \hat{q} . Par ailleurs, il est facile de voir que $t \mapsto g_y(y_u(t))z_{u,v}(t)$ a des dérivées continues jusqu’à l’ordre $q - 1$, s’annulant donc en τ par (14) et (A6), et une dérivée q ième bornée. D’après (20) et avec (A5)(i), il vient $\varsigma_{u,v}(\tau) = 0$ si q est pair, et $\varsigma_{u,v}(\tau) > -\infty$ si q est impair. Combinant avec $[\eta(\tau)] < +\infty$ si q pair et $[\eta(\tau)] = 0$ si q impair, on obtient $\varsigma_{u,v}(\tau)[\eta(\tau)] = 0$, en tout point d’entrée-sortie, pour tout ordre q . Autrement dit, *la contribution des arcs frontières dans le terme de courbure est nulle*. Le traitement des points de contact isolés essentiels, avec (A5)(ii), est classique. Ainsi (19) a l’expression donnée par (15), pour toutes les directions critiques v telles que $I_{u,v}^2$ ne contient pas de points de contact isolés non essentiels. Ces directions formant une partie dense de $C(u)$, lui même dense dans $C_2(u)$ sous les hypothèses (A3), (A4) et (A6), on obtient (16).

Pour la condition suffisante, on note que sous l’hypothèse (A2), l’extension du hessien du lagrangien à $L^2(0, T)$ est une forme de Legendre [2]. Ainsi, la condition classique du second ordre

$$D_{uu}^2 L(u, \eta)(v, v) > 0 \quad \forall v \in C_2(u) \setminus \{0\}, \tag{21}$$

implique que u est solution optimale locale de (\mathcal{P}) satisfaisant la condition de croissance quadratique (3). Il existe un saut entre la condition nécessaire (16) et la condition suffisante (21), dès que le terme de courbure (15) est non nul. Ceci se produit lorsque $q \geq 2$ et qu’il existe des points de contact isolés essentiels. Pour ces derniers, on utilise une méthode de réduction. Classique en programmation semi-infinie [3] dans un cadre C^2 , cette idée est étendue à l’espace $W^{2,\infty}(0, T)$ (utile pour traiter le cas $q \geq 2$). Un point de contact isolé τ est dit *réductible*, si $t \mapsto \frac{d^2}{dt^2} g(y_u(t))$ est continue et (A5)(ii) satisfaite en τ . Pour $\mathcal{T}_u^{\text{red}} = \{\tau_u^1, \dots, \tau_u^N\}$ ensemble fini quelconque de points de contact isolés réductibles de la trajectoire (u, y_u) , et $\varepsilon, \delta > 0$ suffisamment petits, l’application

$$\Theta : B_\infty(u, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^N; \quad \tilde{u} \mapsto (g(y_{\tilde{u}}(\tau_u^i)))_{1 \leq i \leq N},$$

où τ_u^i est l’unique point de maximum de $g(y_u)$ sur $(\tau_u^i - \varepsilon, \tau_u^i + \varepsilon)$, est bien définie, de classe C^1 , deux fois Fréchet différentiable en u , et de plus :

$$g(y_{u+v}(\tau_{u+v}^i)) = g(y_{u+v}(\tau_u^i)) - \frac{(g_y(y_u(\tau_u^i))z_{u,v}(\tau_u^i))^2}{2 \frac{d^2}{dt^2} g(y_u)|_{t=\tau_u^i}} + r(v), \quad i = 1, \dots, N, \tag{22}$$

avec $r(v)/\|v\|_2^2 \rightarrow 0$ lorsque $\|v\|_\infty \rightarrow 0$. Ceci permet d'étendre la condition (21) avec le hessien du lagrangien du problème réduit. Ce dernier fait intervenir un terme supplémentaire, égal au terme de courbure quand $T_u^{\text{red}} = T_u^{\text{ess}}$. On obtient ainsi (17), dont découle la caractérisation de la croissance quadratique.

Les résultats et preuves présentés dans cette Note sont développés dans [1].

Références

- [1] J.F. Bonnans, A. Hermant, No gap second order optimality conditions for optimal control problems with a single state constraint and control, INRIA Report 5837 (2006), Mathematical Programming, in press.
- [2] J.F. Bonnans, A. Shapiro, Perturbation Analysis of Optimization Problems, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [3] R.P. Hettich, H.T. Jongen, Semi-infinite programming: conditions of optimality and applications, in: J. Stoer (Ed.), Optimization Techniques, in: Proc. 8th IFIP Conf. on Optimization Techniques, Part 2, Würzburg, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [4] D.H. Jacobson, M.M. Lele, J.L. Speyer, New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints, Journal of Mathematical Analysis and Applications 35 (1971) 255–284.
- [5] H. Kawasaki, An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second order necessary conditions for minimization problems, Mathematical Programming 41 (1988) 73–96.
- [6] H. Kawasaki, Second order necessary optimality conditions for minimizing a sup-type function, Mathematical Programming Ser. A 49 (1990/91) 213–229.
- [7] H. Maurer, On the minimum principle for optimal control problems with state constraints, Schriftenreihe des Rechenzentrum 41, Universität Münster, 1979.