

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 675-678

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques

Bernadette Miara^a, Paolo Podio-Guidugli^b

^a Laboratoire de modélisation et simulation numérique, ESIEE, 2, boulevard Blaise-Pascal, 93160 Noisy-Le-Grand, France
 ^b Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Roma TorVergata, Via del Politecnico 1, 00133 Roma, Italy

Reçu le 7 septembre 2006 ; accepté le 27 septembre 2006

Disponible sur Internet le 27 octobre 2006

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous présentons dans cette Note une méthode formelle de mise à l'échelle qui permet d'obtenir, à partir de l'élasticité tridimensionnelle linéaire, les équations de structures avec cisaillement comme les plaques de Reissner–Mindlin ou et les poutres de Timoshenko, aussi que d'autres modèles de structures minces. Le principe que nous utilisons est qu'une fonctionnelle d'énergie mise à l'échelle, qui peut contenir des termes de gradient du second ordre, reste bornée lorsque la «finesse» tend vers zéro. *Pour citer cet article : B. Miara, P. Podio-Guidugli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).* © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

© 2000 Academie des sciences. Publie par Eisevier Masson SAS. Tous (

Abstract

A unified formal approach for theories of linear elastic plates and rods. In this Note we present a formal scaling method that allows for the deduction from three-dimensional linearized elasticity of the equations of shearable structures such as Reissner-Mindlin's equations for plates and Timoshenko's equations for rods, as well as other models of thin structures. This method is based on the requirement that a scaled energy functional possibly including second-gradient terms stay bounded in the limit of vanishing 'thinness'. *To cite this article: B. Miara, P. Podio-Guidugli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).* © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Dans cette Note nous proposons une méthode formelle et exhaustive de mise à l'échelle pour déduire, à partir de l'élasticité tridimensionnelle linéarisée, des modèles mécaniques de structures minces (plaques et poutres). Notre méthode asymptotique est *formelle* dans la mesure où les modèles limites que nous obtenons ne sont pas justifiés par un résultat de convergence (mais elle joue un rôle essentiel, par exemple, dans une étude par Γ convergence qui nécessite la connaissance *a priori* d'une famille de fonctionnelles et d'un modèle limite [2]); et elle est *exhaustive* car elle permet d'obtenir tous les modèles possibles à partir d'une formulation donnée de l'énergie tridimensionnelle.

Pour obtenir des *modèles en cisaillement* (dans lesquels l'angle de la section droite et des fibres axiales peut varier au cours de la déformation), on considère des matériaux à *isotropie transverse* (l'isotropie totale ne permet d'obtenir

Adresses e-mail: b.miara@esiee.fr (B. Miara), ppg@uniroma2.it (P. Podio-Guidugli).

¹⁶³¹⁻⁰⁷³X/\$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés. doi:10.1016/j.crma.2006.09.035

que des modèles de type Kirchhoff–Love ou Bernoulli–Navier [3]). Ainsi, trois énergies limites sont établies : les deux premières décrivent le comportement des plaques (déformation membranaire et flexion, Éq. (4)) et des poutres droites (déformation axiale et flexion, Éq. (5)), la troisième conduit au cisaillement dans la section droite et à la torsion des plaques et poutres cylindriques (Éq. (6)). Pour obtenir les modèles de Reissner–Mindlin et de Timoshenko (Section 4), on part d'une énergie élastique augmentée par des termes de *dérivées du second ordre* du champ de déplacement. Le principe qui va nous conduire à ces modèles limites est que la fonctionnelle d'énergie, une fois mise à l'échelle, *reste bornée* lorsque la « finesse » (épaisseur d'une plaque ou aire d'une poutre) tend vers zéro (1).

Les démonstrations détaillées de ces résultats, ainsi que des références de base et historiques, se trouvent dans [1].

2. Les mises à l'échelle

Soit $\varepsilon > 0$ le « petit » paramètre qui permet de mesurer la finesse et que l'on fait tendre vers zéro dans une analyse asymptotique. On considère une famille de cylindres $C(\varepsilon) = \mathcal{P}(\varepsilon) \times \mathcal{R}(\varepsilon)$ de section droite $\mathcal{P}(\varepsilon)$ et d'axe $\mathcal{R}(\varepsilon)$, qui constituent les formes de référence (supposée sans contraintes) des structures de la famille à étudier. On note $x = (x_i)$ les trois coordonnées cartésiennes d'un point $x \in C(\varepsilon)$ et $u(x) = (u_i(x))$ les trois composantes du champ de déplacement. On note $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \text{sym}(\nabla \mathbf{u})$ le tenseur des déformations infinitésimales de composantes cartésiennes $2E_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$. De façon à obtenir des modèles limites de corps *avec cisaillement*, on considère un matériau *transversalement isotrope* (par rapport à la direction axiale) dont la *loi de comportement* $\mathbf{S}(E(u))$ est de la forme :

$$S_{\alpha\beta} = 2\mu E_{\alpha\beta} + \left(\lambda(E_{11} + E_{22}) + \tau_2 E_{33}\right)\delta_{\alpha\beta}, \quad S_{3\alpha} = 2\gamma E_{3\alpha}, \quad S_{33} = \tau_1 E_{33} + \tau_2(E_{11} + E_{22});$$

les inégalités $\mu > 0$, $\gamma > 0$, $\tau_1 > 0$, $\tau_1(\lambda + \mu) - \tau_2^2 > 0$ assurent la positivité de l'énergie élastique $\Sigma(\boldsymbol{u}, \varepsilon) := \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} \frac{1}{2} S_{ij}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) E_{ij}(\boldsymbol{u})$. Le corps cylindrique qu'on obtient ainsi pour chaque ε fixé est soumis aux forces de volume, de densités **b**, et de surface, de densités \mathbf{c}^{\pm} , appliquées sur les faces supérieure et inférieure $\mathcal{P}(\varepsilon)^{\pm}$ du cylindre $\mathcal{C}(\varepsilon)$, le potentiel de chargement associé à ces forces étant $\Delta(\boldsymbol{u}, \varepsilon) := \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} + \int_{\mathcal{P}(\varepsilon)} \boldsymbol{c}^{\pm} \cdot \boldsymbol{u}^{\pm}$. Le champ de déplacement **u** est alors obtenu en minimisant, sur un espace fonctionnel approprié, la fonctionnelle d'énergie

$$\Pi(\boldsymbol{u},\varepsilon) = \Sigma(\boldsymbol{u},\varepsilon) - \Delta(\boldsymbol{u},\varepsilon).$$

Comme dans toute méthode asymptotique, nous mettons à l'échelle successivement le domaine (ce qui nécessite, en principe, trois entiers relatifs, un pour chacune des coordonnées), le champ de déplacement (trois exposants), les données constitutives du matériau concerné (cinq exposants) et les chargements appliqués (neuf exposants). Cependant, des hypothèses de nature physique vont permettre de réduire ces vingt exposants à une liste ℓ de huit entiers relatifs seulement, nommés les *exposants de mise à l'échelle* (par exemple, dans la mesure où nous ne privilègerons aucune direction, la mise à l'échelle sera la même pour les deux coordonnées de la section droite, et il en est de même pour les composantes membranaires du déplacement ; ou bien encore, le même exposant est choisi pour les modules λ et μ qui apparaissent additivement dans la dernière des inégalités constitutives).

Les mises à l'échelle précédentes conduisent à la définition de la *fonctionnelle d'énergie auxiliaire* $\widehat{\Pi}$ associée à une liste $\hat{\ell} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)$ de six *exposants d'énergie* (voir [1]) :

$$\widehat{\Pi}(\bar{\boldsymbol{u}},\varepsilon;\hat{\alpha},\ldots,\hat{\delta}_2) = \varepsilon^{\hat{\alpha}} \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{u}}) + \varepsilon^{\hat{\beta}_1} \mathbf{B}_1(\bar{\boldsymbol{u}}) + \varepsilon^{\hat{\beta}_2} \mathbf{B}_2(\bar{\boldsymbol{u}}) + \varepsilon^{\hat{\gamma}} \Gamma(\bar{\boldsymbol{u}}) - \varepsilon^{\hat{\delta}_1} \Delta_1(\bar{\boldsymbol{u}}) - \varepsilon^{\hat{\delta}_2} \Delta_2(\bar{\boldsymbol{u}}),$$

où

$$\begin{split} \mathsf{A}(\bar{\boldsymbol{u}}) &= \int_{\mathcal{C}(1)} \frac{1}{2} \bar{\tau}_1 \overline{E}_{33}^2, \qquad \Gamma(\bar{\boldsymbol{u}}) = \int_{\mathcal{C}(1)} \frac{1}{2} \big((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \big(\overline{E}_{11} + \overline{E}_{22} \big)^2 - 4\bar{\mu} \big(\overline{E}_{11} \overline{E}_{22} - \overline{E}_{12}^2 \big) \big) \\ \mathsf{B}_1(\bar{\boldsymbol{u}}) &= \int_{\mathcal{C}(1)} 2\bar{\gamma} \big(\overline{E}_{13}^2 + \overline{E}_{23}^2 \big), \qquad \mathsf{B}_2(\bar{\boldsymbol{u}}) = \int_{\mathcal{C}(1)} \big(\bar{\tau}_2 \overline{E}_{33} (\overline{E}_{11} + \overline{E}_{22}) \big), \\ \Delta_1(\bar{\boldsymbol{u}}) &= \int_{\mathcal{C}(1)} \bar{b}_\alpha \bar{u}_\alpha + \int_{\mathcal{P}(1)} \bar{c}_\alpha^{\pm} \bar{u}_\alpha^{\pm}, \qquad \Delta_2(\bar{\boldsymbol{u}}) = \int_{\mathcal{C}(1)} \bar{b}_3 \bar{u}_3 + \int_{\mathcal{P}(1)} \bar{c}_3^{\pm} \bar{u}_3^{\pm}. \end{split}$$

Nous sommes alors en mesure de faire l'analyse de l'énergie auxiliaire $\widehat{\Pi}$ et d'en déduire les modèles limites.

3. Énergies des structures minces

Le principe de notre approche asymptotique est que le choix de la liste $\hat{\ell}$ doit être tel que l'énergie auxiliaire $\hat{\Pi}$ reste bornée supérieurement lorsque ε tend vers 0 :

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \widehat{\Pi}(\bar{\boldsymbol{u}},\varepsilon;\hat{\ell}) < +\infty, \tag{1}$$

pour tout champ $\bar{\mathbf{u}}$ tel que les intégrales $A(\bar{\mathbf{u}}), \ldots, \Delta_2(\bar{\mathbf{u}})$ aient une valeur finie.

Alors, (i) si l'un des exposants d'energie $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\delta}_2$ est positif [respectivement nul] la fonctionnelle correspondante A, B₁, ..., $\hat{\Delta}_2$ disparaît [se trouve] dans la fonctionnelle limite $\widehat{\Pi}(\bar{u}, 0; \hat{\ell})$, et par conséquent elle disparaît aussi [se trouve] dans l'énergie associée $\Pi(u, \varepsilon)$; (ii) si l'un des exposants $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}$ est négatif alors la fonctionnelle correspondante A, B₁, Γ doit être rendue identiquement nulle, ce qui se traduit par l'existence de *contraintes internes*. Plus précisément,

– la condition $\hat{\alpha} < 0$, en tenant compte de l'inégalité $\bar{\tau}_1 > 0$, induit la *contrainte interne* $\overline{E}_{33} \equiv 0$ dans C(1), ce qui est equivalent à un champ des déplacements admissibles défini par :

$$u_3 = \hat{u}_3(x_1, x_2) ; \tag{2}$$

- la condition $\hat{\beta}_1 < 0$ induit *la contrainte interne* $\overline{E}_{\alpha 3} = 0$ dans $\mathcal{C}(1)$, ce qui permet de retrouver les modèles de structures minces *sans cisaillement* (de *Kirchhoff–Love* pour les plaques et de *Bernoulli–Navier* pour les pour les pour les plaques et de *Bernoulli–Navier* pour les pour les pour les plaques et de *Bernoulli–Navier* pour les pour les pour les admissibles défini par :

$$u_1 = \hat{v}_1(x_3) - x_2 \hat{\psi}_3(x_3), \qquad u_2 = \hat{v}_2(x_3) + x_1 \hat{\psi}_3(x_3).$$
 (3)

Sans perte de généralité on supposera par la suite $\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_2 = 0$, et pour s'intéresser seulement au *cisaillement*, on fera l'hypothèse $\hat{\beta}_1 = 0$ (si l'une des deux conditions $\hat{\alpha} < 0$ ou $\hat{\gamma} < 0$ est satisfaite, la fonctionnelle B₂ disparaît de la limite quel que soit l'exposant β_2). Ainsi on peut en déduire les modèles limites suivants.

– Modèles de plaques cylindriques (étirement membranaire et flexion). Pour $\hat{\alpha} < 0$ et $\hat{\gamma} = 0$, l'énergie élastique, restreinte à la classe des déplacements admissibles (2), est de la forme :

$$\Sigma_{P}(\boldsymbol{u},\varepsilon) = \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} 2\gamma \left(E_{13}^{2}(\boldsymbol{u}) + E_{23}^{2}(\boldsymbol{u}) \right) + \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} \frac{1}{2} \left((\lambda + 2\mu) \left(E_{11}(\boldsymbol{u}) + E_{22}(\boldsymbol{u}) \right)^{2} - 4\mu \left(E_{11}(\boldsymbol{u}) E_{22}(\boldsymbol{u}) - E_{12}^{2}(\boldsymbol{u}) \right) \right);$$
(4)

– Modèles de poutres cylindriques (étirement axial et flexion). Pour $\hat{\alpha} = 0$ et $\hat{\gamma} < 0$, l'énergie élastique, restreinte à la classe des déplacements admissibles (3), est de la forme :

$$\Sigma_{R}(\boldsymbol{u},\varepsilon) = \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} \frac{1}{2} \tau_{1} E_{33}^{2}(\boldsymbol{u}) + \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} 2\gamma \left(E_{13}^{2}(\boldsymbol{u}) + E_{23}^{2}(\boldsymbol{u}) \right).$$
(5)

Les trois modèles suivants, définis sur des espaces de déplacement admissible différents, correspondent à la même énergie élastique :

$$\Sigma_{AS}(\boldsymbol{u},\varepsilon) = \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} 2\gamma \left(E_{13}^2(\boldsymbol{u}) + E_{23}^2(\boldsymbol{u}) \right);$$
(6)

- *Cisaillement antiplan*. Pour $\hat{\alpha} < 0$ et $\hat{\gamma} < 0$, l'énergie (6) est restreinte aux l'ensemble (2) et (3);

- Torsion des plaques. Pour $\hat{\alpha} < 0$ et $\hat{\gamma} > 0$, l'énergie (6) est restreinte à l'ensemble (2);
- Torsion des poutres. Pour $\hat{\alpha} > 0$ et $\hat{\gamma} < 0$, l'énergie (6) est restreinte à l'ensemble (3).

4. Élasticité du second ordre

Remarquons que le modèle de plaques de Reissner-Mindlin est la restriction de l'énergie associée à Σ_P à l'ensemble $u_{\alpha} = \hat{v}_{\alpha}(x_1, x_2) + x_3\hat{\varphi}_{\alpha}(x_1, x_2), u_3 = \hat{u}_3(x_1, x_2)$, que l'on peut définir aussi par les *contraintes internes du second ordre* $u_{\alpha,33} = 0$ jointes à la contrainte du premier ordre $E_{33} = 0$. De même, le modèle de poutres de Timoshenko est la restriction de l'énergie associée à Σ_R à l'ensemble $u_{\alpha} = \hat{v}_{\alpha}(x_3), u_3 = \hat{w}(x_3) + x_2\hat{\psi}_1(x_3) - x_1\hat{\psi}_2(x_3),$ défini aussi par les *contraintes internes du second ordre* $u_{3,\alpha\beta} + u_{\alpha,3\beta} = 0$ jointes à la contrainte du premier ordre $E_{\alpha3} = 0$. Une façon simple de retrouver ces modèles est alors d'ajouter à l'énergie $\Sigma(\boldsymbol{u},\varepsilon)$ l'énergie des déformations que les contraintes du second ordre prohiberaient : $\int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} \frac{1}{2} (\tau_P \sum_{\alpha} (u_{\alpha,33})^2 + \tau_R \sum_{\alpha,\beta} (u_{3,\alpha\beta} + u_{\alpha,3\beta})^2)$, où les deux nouvelles constantes (positives) liées au matériau sont, à leur tour, mises à l'échelle, $\bar{\tau}_P = \varepsilon^{-i_1} \tau_P$, $\bar{\tau}_R = \varepsilon^{-i_2} \tau_R$. L'examen de la *fonctionnelle auxiliaire augmentée* :

$$\widehat{\Pi}_{a}(\bar{\boldsymbol{u}},\varepsilon) := \widehat{\Pi}(\bar{\boldsymbol{u}},\varepsilon) + \varepsilon^{\iota_{1}} \int\limits_{\mathcal{C}(1)} \frac{1}{2} \bar{\tau}_{P} \sum_{\alpha} (\bar{\boldsymbol{u}}_{\alpha,33})^{2} + \varepsilon^{\iota_{2}} \int\limits_{\mathcal{C}(1)} \frac{1}{2} \bar{\tau}_{R} \sum_{\alpha,\beta} (\bar{\boldsymbol{u}}_{3,\alpha\beta} + \bar{\boldsymbol{u}}_{\alpha,3\beta})^{2}$$

permet d'obtenir, grâce à notre principe de bornitude (1), deux modèles classique de structures minces :

- Modèle des plaques de Reissner-Mindlin. On choisit $\hat{\alpha} < 0$, $\hat{\gamma} = 0$ et $\iota_1 < 0$, $\iota_2 > 0$;

– Modèle des poutres de Timoshenko. On choisit $\hat{\alpha} = 0$, $\hat{\gamma} < 0$ et $\iota_1 > 0$, $\iota_2 < 0$.

Remerciements

Ces travaux ont été conduits grâce aux projets italien et européens PRIN 2005 "Modelli Matematici per la Scienza dei Materiali" et MULTIMAT (MRTN-CT-2004-505226) "Multi-scale Modelling and Characterisation for Phase Transformations in Advanced Materials" (P. P.-G.) et Smart Systems (HPRN-CT-2002-00284) (B.M.).

Références

- [1] B. Miara, P. Podio-Guidugli, Deduction by scaling: a unified approach to classic plate and rod theories (2006), in press.
- [2] R. Paroni, P. Podio-Guidugli, G. Tomassetti, The Reissner–Mindlin plate theory via Γ-convergence, à paraitre dans C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2006).
- [3] P. Podio-Guidugli, An exact derivation of the thin plate equation, J. Elasticity 22 (1989) 121–133.