



Géométrie différentielle

L'opérateur de Dirac hypoelliptique

Jean-Michel Bismut

Département de mathématique, université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 6 octobre 2006 ; accepté le 10 octobre 2006

Disponible sur Internet le 7 novembre 2006

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

On annonce la construction d'une déformation de l'opérateur de Dirac sur une variété compacte spin en un opérateur de Dirac hypoelliptique sur l'espace total \mathcal{X} du fibré tangent. Cette construction donne un analogue pour l'opérateur de Dirac d'une construction que nous avons effectuée pour le complexe de de Rham. Pour simplifier l'exposé, nous n'explicitons la construction que pour des variétés complexes. Nous construisons des métriques de Quillen hypoelliptiques, que nous comparons aux métriques de Quillen classiques. *Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The hypoelliptic Dirac operator. We announce the construction of a deformation of the Dirac operator on a compact spin manifold into a hypoelliptic Dirac operator on the total space of the tangent space. This construction gives an analogue for the Dirac operator of a related deformation we already gave for the de Rham complex. For simplicity, we only explain the construction in the case of complex manifolds. We define hypoelliptic Quillen metrics, which we compare to the classical Quillen metrics. *To cite this article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Introduction

Dans [2–4], nous avons construit une déformation de la théorie de Hodge ordinaire d'une variété compacte X , dont le Laplacien est un opérateur hypoelliptique sur l'espace total de T^*X . Ce Laplacien interpole en un sens adéquat entre le Laplacien de Hodge de Rham sur X , et le flot géodésique sur T^*X . Les propriétés analytiques de cette déformation ont été étudiées en détail par Lebeau et nous-même dans [9,10]. Dans ces mêmes références, nous avons aussi défini une métrique de Ray–Singer sur le déterminant de la cohomologie de de Rham d'un fibré plat sur X , et montré en particulier qu'elle coïncide avec la métrique de Ray–Singer elliptique.

Dans la présente note, nous annonçons la construction d'une déformation hypoelliptique de l'opérateur de Dirac sur une variété orientée compacte Riemannienne spin X . Nous explicitons cette construction pour les variétés complexes Kählériennes. Le Laplacien correspondant est un opérateur hypoelliptique d'ordre deux sur l'espace total \mathcal{X} du fibré tangent à la variété considérée, qui interpole entre le carré de l'opérateur de Dirac elliptique sur X et le flot géodésique

Adresse e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut).

sur \mathcal{X} . Nous définissons une métrique de Quillen hypoelliptique sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré holomorphe Hermitien E sur X , et nous donnons une formule qui compare cette métrique à la métrique de Quillen classique [7,13] sur X . Dans cette formule apparaît le genre R de Gillet–Soulé [11].

Les démonstrations des résultats annoncés sont données dans [5]. Les résultats y sont donnés également dans le contexte équivariant, et se rapportent aussi aux formes de torsion analytique holomorphe.

1. Le complexe de Dolbeault hypoelliptique

Soit X une variété compacte complexe de dimension n , et soit J la structure complexe correspondante sur $T_{\mathbf{R}}X$. Soit $\Lambda^{\cdot}(T^*X)$, $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$ les algèbres extérieures holomorphes et antiholomorphes de TX . Soit E un fibré holomorphe sur X . Soit $(\Omega^{(0,\cdot)}(X, E), \bar{\partial}^X)$ le complexe de Dolbeault des formes différentielles antiholomorphes tordues par E .

Soit $\pi : \mathcal{X} \rightarrow X$ l'espace total du fibré tangent holomorphe TX , soit y la section canonique de π^*TX sur \mathcal{X} . Dans la suite on identifie l'algèbre extérieure $\Lambda^{\cdot}(T^*X)$ à l'algèbre extérieure holomorphe de la fibre TX . Par contre on note par $\hat{\Lambda}^{\cdot}(\overline{T^*X})$ l'algèbre extérieure antiholomorphe de la fibre TX . Ainsi $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}(T^*X)$ est l'algèbre extérieure complexifiée de X , et $\hat{\Lambda}^{\cdot}(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}(T^*X)$ est l'algèbre extérieure complexifiée de la fibre TX . Soit $N^{H(1,0)}, N^{H(0,1)}, N^V$ les opérateurs de nombre sur $\Lambda^{\cdot}(T^*X), \Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X}), \hat{\Lambda}^{\cdot}(\overline{T^*X})$.

Soit $i : X \rightarrow \mathcal{X}$ le plongement de X dans \mathcal{X} comme sous-variété des zéros de y . Le complexe de Koszul $(\pi^*\Lambda^{\cdot}(T^*X), i_y)$ donne une résolution de $i_*\mathcal{O}_X$ dans \mathcal{X} .

Soit $Y = y + \bar{y}$ la section de $T_{\mathbf{R}}X$ correspondant à la section y . On pose

$$A_Y'' = \bar{\partial}^X + i_y. \quad (1)$$

On considère le complexe de formes à support compact

$$(\Omega^{(0,\cdot)}(\mathcal{X}, \pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} E)), A_Y''),$$

qu'on gradue par l'opérateur $N^V + N^{H(0,1)} - N^{H(1,0)}$. Le morphisme

$$i_* : (\Omega^{(0,1)}(\mathcal{X}, \pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} E)), A_Y'') \rightarrow (\Omega^{(0,\cdot)}(X, E), \bar{\partial}^X)$$

est un quasiisomorphisme de complexes \mathbf{Z} -gradués.

Soit g^{TX} une métrique Kählérienne sur X et soit ω^X la forme de Kähler, de telle sorte que $\omega^X(U, V) = \langle U, JV \rangle$. Soit ∇^{TX} la connexion holomorphe Hermitienne sur (TX, g^{TX}) , et soit R^{TX} sa courbure. La connexion ∇^{TX} induit un sous fibré horizontal $T^H\mathcal{X}$ de $T\mathcal{X}$, de telle sorte qu'on a l'isomorphisme de fibrés C^∞ ,

$$T\mathcal{X} \simeq \pi^*(TX \oplus TX). \quad (2)$$

On en déduit un isomorphisme C^∞ de fibrés en algèbres,

$$\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*\mathcal{X}}) \simeq \pi^*(\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} \hat{\Lambda}^{\cdot}(\overline{T^*X})). \quad (3)$$

Notons qu'en utilisant l'isomorphisme (3), on peut écrire $\bar{\partial}^{\mathcal{X}}$ sous la forme,

$$\bar{\partial}^{\mathcal{X}} = \nabla^{I''} + \bar{\partial}^V. \quad (4)$$

Dans (4), \mathbf{I}'' désigne le fibré des sections C^∞ de $\pi^*(\hat{\Lambda}^{\cdot}(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} E)$ le long des fibres TX , et $\nabla^{I''}$ désigne la partie antiholomorphe de la connexion naturelle $\nabla^{\mathbf{I}}$. De plus $\bar{\partial}^V$ est l'opérateur de Dolbeault de long des fibres. La formule (4) donne la décomposition de $\bar{\partial}^{\mathcal{X}}$ en la somme d'une partie horizontale et d'une partie verticale.

Soit $r : Y \rightarrow -Y$ l'involution évidente de \mathcal{X} . Alors r agit naturellement sur l'algèbre extérieure verticale $\Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} \hat{\Lambda}^{\cdot}(\overline{T^*X})$.

Soit g^E une métrique Hermitienne sur E , soit ∇^E la connexion holomorphe associée sur E , et soit R^E sa courbure. La métrique g^{TX} induit une métrique sur $T\mathcal{X} \simeq \pi^*(TX \oplus TX)$. Soit $\langle \cdot \rangle_{L^2}$ le produit Hermitien sur $\Omega^{(0,\cdot)}(\mathcal{X}, \pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} E))$ qui est associé à cette métrique ainsi qu'à g^E . Soit η la forme Hermitienne sur $\Omega^{(0,\cdot)}(\mathcal{X}, \pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} E))$,

$$\eta(s, s') = (2\pi)^{-2n} \langle s, r^*s' \rangle_{L^2}. \quad (5)$$

Soit L l'opérateur de Hodge de multiplication par ω^X sur $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}(T^*X)$, et soit Λ son adjoint. Soit ϵ la forme Hermitienne,

$$\epsilon(s, s') = \eta(e^{i\Lambda}s, e^{i\Lambda}s'). \quad (6)$$

Plus généralement, pour $b > 0$, on munit le premier facteur TX dans (2) de la métrique g^{TX} , et le deuxième facteur de la métrique $b^4 g^{TX}$. La forme Hermitienne ϵ_b correspondante est donnée par

$$\epsilon_b(s, s') = b^{4n} \epsilon(s, b^{-4N^V} s'). \tag{7}$$

Définition 1.1. Soit $A'_{Y,b}$ l'adjoint formel de A''_Y relativement à ϵ_b .

Soit $\bar{\partial}^{V*}$ l'adjoint L^2 ordinaire de $\bar{\partial}^V$. En utilisant le fait que ω^X est fermée, on vérifie facilement que

$$A'_{Y,b} = \nabla^{I'} + \frac{1}{b^4} \bar{\partial}^{V*} + \bar{y}^* \wedge + i\bar{y}. \tag{8}$$

Dans (8), $\bar{y}^* \in T^*X$ correspond à $\bar{y} \in \overline{T^*X}$ par la métrique g^{TX} . Naturellement, on a encore,

$$A''_Y{}^2 = 0. \tag{9}$$

Posons

$$A_{Y,b} = A''_Y + A'_{Y,b}. \tag{10}$$

Soit K_b l'application $s(x, Y) \rightarrow s(x, bY)$. On pose

$$C_{Y,b} = b^{-2N^V} K_{1/b} e^{i\Lambda} A_{Y,b} e^{-i\Lambda} K_b b^{2N^V}. \tag{11}$$

Soit F le fibré vectoriel,

$$F = \Lambda(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} \Lambda(T^*X) \widehat{\otimes} \widehat{\Lambda}(\overline{T^*X}) \widehat{\otimes} E. \tag{12}$$

Soit ∇^F la connexion sur F qui est induite par ∇^{TX}, ∇^E . Soit w_1, \dots, w_n une base orthonormale de TX pour g^{TX} . On identifie w_1, \dots, w_n à leurs relevés dans $T^H\mathcal{X}$. On désigne par $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n$ la base correspondante de la fibre verticale. On désigne par w^1, \dots, w^n et $\widehat{w}^1, \dots, \widehat{w}^n$ les bases duales.

On pose

$$E = (\bar{w}^i \wedge + i w_i) \nabla_{\bar{w}_i}^E + (w^i \wedge - i \bar{w}_i) \nabla_{w_i}^E. \tag{13}$$

De (4), (8), on tire

$$C_{Y,b} = E + \frac{1}{b} (\bar{\partial}^V + \bar{\partial}^{V*} + i_y + \bar{y}^* \wedge). \tag{14}$$

Notons ici que si on fait formellement $Y = 0$ dans (10) ou (14), on obtient des superconnexions sur \mathbf{I} . Les opérateurs $A_{Y,b}, C_{Y,b}$ sont donc des perturbations de superconnexions par des opérateurs d'ordre 0.

2. Le formule de Lichnerowicz pour $C_{Y,b}^2$

Soit $\widehat{L}, \widehat{\Lambda}$ les opérateurs de Hodge agissant sur $\Lambda(T^*X) \widehat{\otimes} \widehat{\Lambda}(T^*X)$. Soit Δ^V le Laplacien vertical dans la fibre TX relativement à g^{TX} .

Théorème 2.1. Pour $b > 0$, on a

$$C_{Y,b}^2 = \frac{1}{b^2} \left(-\frac{1}{2} \Delta^V + \frac{1}{2} |Y|^2 - i\widehat{L} + i\widehat{\Lambda} \right) - \nabla_{R^{TX}Y} + \langle R^{TX} w_i, \bar{w}_j \rangle \bar{w}^j \wedge i \bar{w}_i + \frac{1}{b} \nabla_Y^F + R^E. \tag{15}$$

De (15), par application du théorème de Hörmander [12], on tire que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial u} - C_{Y,b}^2$ est hypoelliptique. Dans la suite on dira que $A_{Y,b}^2$ et $C_{Y,b}^2$ sont des Laplaciens hypoelliptiques.

3. Le Laplacien hypoelliptique comme déformation du Laplacien elliptique

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(\overline{T^*X}) \otimes E}$ le produit hermitien sur $\Lambda(\overline{T^*X}) \otimes E$ induit par g^{TX}, g^E sur $\Lambda(\overline{T^*X}) \otimes E$. Soit dv_X la mesure de volume induite par g^{TX} sur X . On munit $\Omega^{(0,\cdot)}(X, E)$ du produit hermitien normalisé,

$$\langle s, s' \rangle_{L^2} = (2\pi)^{-n} \int_X \langle s, s' \rangle_{\Lambda(\overline{T^*X}) \otimes E} dv_X. \quad (16)$$

Soit $\bar{\partial}^{X*}$ l'adjoint formel de $\bar{\partial}^X$ relativement à (16).

On pose

$$\alpha = (\bar{\partial}^V + i_Y + \bar{\partial}^{V*} + \bar{y}^* \wedge)^2. \quad (17)$$

Soit $\widehat{\omega}^{X,V} \in \Lambda(T^*X) \widehat{\otimes} \widehat{\Lambda}(\overline{T^*X})$ la forme de Kähler associée à la métrique g^{TX} . Alors par les résultats de [1, Section 1], on sait que, dans chaque fibre, $\ker \alpha$ est de dimension 1 et est engendré par la forme

$$\beta = \exp(i\widehat{\omega}^{X,V} - |Y|^2/2). \quad (18)$$

Notons que

$$i^* \beta = 1. \quad (19)$$

On plonge isométriquement $\Omega^{(0,\cdot)}(X, E)$ dans $\Omega^{(0,\cdot)}(\mathcal{X}, \pi^*(\Lambda(T^*X) \widehat{\otimes} E))$ par le plongement $\alpha \rightarrow \pi^* \alpha \wedge \beta$. Notons que ce plongement induit un quasiisomorphisme de complexes, qui est un quasiinverse de i_* .

Soit P le projecteur orthogonal de l'espace des sections L^2 de F sur \mathcal{X} sur $\ker \alpha$. Rappelons que E est défini par la formule (13). On a alors le résultat fondamental, qui est une conséquence immédiate de (13).

Théorème 3.1. *On a l'identité,*

$$PEP = \bar{\partial}^X + \bar{\partial}^{X*}. \quad (20)$$

On peut écrire l'équation (15) sous la forme

$$C_{Y,b}^2 = \frac{\alpha}{b^2} + \frac{\beta}{b} + \gamma. \quad (21)$$

Notons que β envoie $\ker \alpha$ dans $\ker \alpha^\perp$.

Soit α^{-1} l'inverse de la restriction de α à $\ker \alpha^\perp$. On a alors un analogue de [4, Théorèmes 3.13 et 3.14].

Théorème 3.2. *On a l'identité*

$$P(\gamma - \beta \alpha^{-1} \beta)P = (\bar{\partial}^X + \bar{\partial}^{X*})^2. \quad (22)$$

Démonstration. L'identité (21) peut être obtenue en prenant le carré de (14). Alors (22) résulte facilement de (20). On peut aussi en donner une démonstration directe. \square

Remarque 3.3. Instruits par l'expérience de [4,8–10], nous savons que les Théorèmes 3.1 et 3.2 sont les résultats clés permettant de montrer que le Laplacien hypoelliptique sur \mathcal{X} est effectivement une déformation Laplacien elliptique sur X .

4. Résolvante du Laplacien hypoelliptique et théorie de Hodge hypoelliptique

Pour des raisons formelles, l'opérateur $A_{Y,b}^2$ a les mêmes propriétés que le Laplacien hypoelliptique considéré dans [9,10]. En particulier pour $b > 0$, l'opérateur $A_{Y,b}^2$ est à spectre discret, sa résolvante est compacte, et converge en un sens adéquat vers la résolvante de $(\bar{\partial}^X + \bar{\partial}^{X*})^2$ quand $b \rightarrow 0$. Pour $b > 0$ assez petit, le spectre est de partie réelle positive ou nulle, et à distance finie, pour $b > 0$ assez petit, le spectre est réel. Pour $b > 0$ assez petit, toutes les conclusions de la théorie de Hodge classique concernant le lien entre formes harmoniques et cohomologie restent vraies. L'ensemble des paramètres $b > 0$ pour lequel ces conclusions ne sont pas vraies est discret dans \mathbf{R}_+ .

5. Le cas de deux métriques

Soit g^{TX} une métrique Kählérienne sur X de forme de Kähler ω^X , soit \hat{g}^{TX} une autre métrique sur TX . On utilise le scindage $T\mathcal{X} = \pi^*(TX \oplus TX)$ relativement à la connexion holomorphe Hermitienne $\hat{\nabla}^{TX}$ pour \hat{g}^{TX} . Pour $b > 0$, on munit $T\mathcal{X}$ de la métrique $g^{TX} \oplus b^4 \hat{g}^{TX}$. On peut développer une partie de la théorie précédente quand g^{TX} et \hat{g}^{TX} ne sont pas proportionnelles. Il faut modifier certains calculs de [10] pour obtenir les résultats correspondants.

6. La métrique de Quillen hypoelliptique

On se place désormais sous les hypothèses de la Section 5. On pose

$$\lambda = \det H^{(0,\cdot)}(X, E|_X). \tag{23}$$

Alors λ est une droite complexe.

Soit $g^{TX'}$ une autre métrique Kählérienne sur X . Les métriques $g^{TX'}$, g^E déterminent une métrique de Quillen [7,13] $\|\cdot\|_{\lambda}^2$ sur la droite λ , qu'on calcule à l'aide de la théorie de Hodge classique de X et de la torsion de Ray–Singer holomorphe [14] sur X . Cette métrique a des propriétés remarquables [7,13].

En imitant les méthodes de [9,10], et en utilisant en particulier l'autoadjonction de $A_{Y,b}^2$ relativement à ϵ_b , on peut définir à l'aide des métriques g^{TX} , \hat{g}^{TX} , g^E une métrique de Quillen hypoelliptique généralisée $\|\cdot\|_{\lambda,h}^2$ sur λ . Le fait qu'elle soit une métrique généralisée indique qu'a priori cette métrique est de signe arbitraire.

Soit $\widetilde{\text{Td}}(TX, g^{TX'}, \hat{g}^{TX})$ la classe de Bott–Chern [6] relativement aux métriques $g^{TX'}$ et \hat{g}^{TX} et à la classe de Todd. Soit $R(x)$ le genre additif de Gillet–Soulé [11].

On montre dans [5] le résultat de comparaison suivant.

Théorème 6.1. *La métrique $\|\cdot\|_{\lambda,h}^2$ est une métrique ordinaire sur λ . De plus on a,*

$$\log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda,h}^2}{\|\cdot\|_{\lambda}^2} \right) = - \int_X \widetilde{\text{Td}}(TX, g^{TX'}, \hat{g}^{TX}) \text{ch}(E, g^E) + \int_X \text{Td}(TX) R(TX) \text{ch}(E). \tag{24}$$

Remarque 6.2. La formule (24) est remarquable. Elle indique en effet que la métrique hypoelliptique $\|\cdot\|_{\lambda,h}^2$ de dépend pas de g^{TX} , et que de plus, elle vérifie une version raffinée du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck pour la métrique \hat{g}^{TX} , qui n'est pas nécessairement Kählérienne. L'apparition du genre R dans (24) peut faire penser à un résultat qui serait relatif à l'immersion $i : X \rightarrow \mathcal{X}$ pour des métriques de Quillen classiques [8]. Cette analogie est en partie trompeuse.

Références

[1] J.-M. Bismut, Koszul complexes, harmonic oscillators, and the Todd class, J. Amer. Math. Soc. 3 (1) (1990) 159–256. With an appendix by the author and C. Soulé.
 [2] J.-M. Bismut, Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (6) (2004) 471–476.
 [3] J.-M. Bismut, Le laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (7) (2004) 555–559.
 [4] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle, J. Amer. Math. Soc. 18 (2) (2005) 379–476 (electronic).
 [5] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Dirac operator, à paraître, 2006.
 [6] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott–Chern forms and analytic torsion, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 49–78.
 [7] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants, Comm. Math. Phys. 115 (2) (1988) 301–351.
 [8] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex Immersions and Quillen Metrics, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., vol. 74, 1991 (1992), ii+298 pp.
 [9] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Laplacien hypoelliptique et torsion analytique, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2) (2005) 113–118.
 [10] J.-M. Bismut, G. Lebeau, The hypoelliptic Laplacian and Ray–Singer metrics, à paraître, 2006.
 [11] H. Gillet, C. Soulé, An arithmetic Riemann–Roch theorem, Invent. Math. 110 (3) (1992) 473–543.
 [12] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967) 147–171.
 [13] D. Quillen, Determinants of Cauchy–Riemann operators on Riemann surfaces, Funct. Anal. Appl. 19 (1) (1985) 31–34.
 [14] D.B. Ray, I.M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. (2) 98 (1973) 154–177.