





C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 755-758

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Connexions pour les variétés riemanniennes avec une structure de type G_2 ou Spin(7)

Edmond Bonan

LAMFA CNRS UMR 6140, Université de Picardie Jules-Verne, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France
Reçu le 10 octobre 2006; accepté le 16 octobre 2006
Disponible sur Internet le 21 novembre 2006
Présenté par Thierry Aubin

Résumé

Nous construisons les connexions euclidiennes de type G_2 ou Spin(7), induites par la connexion de Levi-Civita. *Pour citer cet article : E. Bonan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Connections for Riemannian manifolds with structure group G_2 or Spin(7). We write down Euclidean connections of G_2 or Spin(7) type which are induced by Levi-Civita connection. *To cite this article: E. Bonan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343* (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Au cours de la dernière décennie, les variétés à groupe d'holonomie faible G_2 ou Spin(7), apparaissent dans la théorie des cordes supersymétriques. Dans ce contexte, la connexion de Levi-Civita est délaissée au profit des connexions euclidiennes dont la torsion est complètement antisymétrique [7]. Nous reproduisons ci dessous la Note, remise le 15 juin 1995, présentée par André Lichnerowicz, modifiée selon les voeux du rapporteur, mais qui, pour des raisons obscures, n'a jamais été publiée. Cette construction est analogue à celle qui figure dans [2], pour le cas d'une variété à groupe d'holonomie Sp(n) Sp(1). Les deux propositions concernant la torsion des connexions introduites ont été ajoutées.

Désignons par V_7 ou V_8 une variété riemannienne dont le fibré principal des repères orthonormés admet une réduction à un sous-fibré de repères adaptés à la *forme cubique extérieure* Φ ou à la *forme quartique extérieure* Ω , de groupe structural le sous-groupe G_2 ou Spin(7). Ces formes *globales*, qui ont été définies localement dans [1], s'écrivent :

$$\Phi = \omega^{124} + \omega^{235} + \omega^{346} + \omega^{457} + \omega^{561} + \omega^{672} + \omega^{713},$$

Adresse e-mail: ebonan@noos.fr (E. Bonan).

$$\Omega = \omega^{1248} + \omega^{2358} + \omega^{3468} + \omega^{4578} + \omega^{5618} + \omega^{6728} + \omega^{7138} + \cdots + \omega^{5673} + \omega^{6714} + \omega^{7125} + \omega^{1236} + \omega^{2347} + \omega^{3451} + \omega^{4562}$$

où nous avons posé $\omega^{i j \dots k} = \omega^i \wedge \omega^j \wedge \dots \wedge \omega^k$.

Désignons par Λ_d^p le sous G_2 ou Spin(7)-module *irréductible* de $\Lambda^p(V_7)$ ou $\Lambda^p(V_8)$ de dimension d. M. Fernandez ([5] et [6]), A. Gray [5] et R. Bryant ([3] et [4]) ont déterminé les décompositions *en sommes directes*,

$$\begin{split} & \Lambda^2(V_7) = \Lambda_7^2 \oplus \Lambda_{14}^2, \qquad \Lambda^3(V_7) = \Lambda_1^3 \oplus \Lambda_7^3 \oplus \Lambda_{27}^3, \\ & \Lambda^2(V_8) = \Lambda_7^2 \oplus \Lambda_{21}^2, \qquad \Lambda^3(V_8) = \Lambda_8^3 \oplus \Lambda_{48}^3, \qquad \Lambda^4(V_8) = \Lambda_1^4 \oplus \Lambda_7^4 \oplus \Lambda_{27}^4 \oplus \Lambda_{35}^4. \end{split}$$

Introduisons les opérateurs de Lichnerowicz ([9] p. 189) associés à ces formes :

$$\mathbf{K}_{1}(\Phi), \quad \mathbf{K}_{2}(\Phi) = *^{-1}\mathbf{K}_{1}(\Phi)*, \quad \mathbf{K}_{1}(\Omega), \quad \mathbf{K}_{3}(\Omega) = *^{-1}\mathbf{K}_{1}(\Omega)*,$$

où par définition

$$\mathbf{K}_{1}(\omega^{iJk}) = e(\omega^{iJ})i(\omega^{k}) - e(\omega^{ik})i(\omega^{J}) + e(\omega^{Jk})i(\omega^{i}),$$

$$\mathbf{K}_{1}(\omega^{iJkh}) = e(\omega^{iJk})i(\omega^{h}) - e(\omega^{iJh})i(\omega^{k}) + e(\omega^{ikh})i(\omega^{J}) - e(\omega^{Jkh})i(\omega^{i}).$$

Nous utiliserons systématiquement le lemme de Schur, en appliquant ces homomorphismes de G_2 ou Spin(7)modules à des éléments arbitrairement choisis dans des G₂ ou Spin(7)-modules irréductibles, pour démontrer les lemmes suivants:

Lemme 1. La dérivation $\mathbf{K}_1(\Phi)$ envoie Λ_7^2 sur Λ_7^3 et annule Λ_{14}^2 .

Lemme 2. Sur une forme $\vartheta \in \Lambda^2$, $K_2(\Phi)K_1(\Phi)\vartheta = 12\vartheta$.

Démonstration. L'opérateur $\mathbf{K}_1(\Phi)$ envoie les trois 2-formes ω^{12} , ω^{57} et ω^{63} sur la 3-forme non nulle $\omega^{135} - \omega^{256} +$ $\omega^{167} - \omega^{237}$ et l'opérateur $\mathbf{K}_2(\Phi)$ ramène chacune des quatre 3-formes intervenant dans cette somme sur la 2-forme $\vartheta = \omega^{12} + \omega^{57} + \omega^{63}$ qui appartient au G_2 -module Λ_7^2 , tandis que $\omega^{12} - \omega^{57}$ appartient au G_2 -module Λ_{14}^2 , une version de l'algèbre de Lie du groupe G_2 . \square

Lemme 3. La dérivation $\mathbf{K}_1(\Omega)$ envoie Λ_7^2 sur Λ_7^4 et annule Λ_{21}^2 .

Lemme 4. Sur une forme $\vartheta \in \Lambda_7^2$, $K_3(\Omega)K_1(\Omega)\vartheta = 32\vartheta$.

Démonstration. L'opérateur $\mathbf{K}_1(\Omega)$ envoie les quatre 2-formes ω^{12} , ω^{57} , ω^{63} et ω^{84} sur la 4-forme non nulle ω^{1358} – $\omega^{2568} + \omega^{1678} - \omega^{2378} - \omega^{2467} + \omega^{1347} + \omega^{2345} - \omega^{1456}$ et l'opérateur $\mathbf{K}_3(\Omega)$ ramène chacune des huit 4-formes intervenant dans cette somme sur la 2-forme $\vartheta = \omega^{12} + \omega^{57} + \omega^{63} + \omega^{84}$ qui appartient au Spin(7)-module Λ_7^2 , tandis que $\omega^{12} - \omega^{57}$ appartient au Spin(7)-module Λ^2_{21} , une version de l'algèbre de Lie du groupe Spin(7). \square

2. Plaçons nous d'abord sur V_7

Décomposons la 1-forme de la connexion de Levi-Civita $\pi = \varpi + \tau$, où la nouvelle connexion ϖ prend ses valeurs dans $\Lambda_{14}^2 \otimes \Lambda^1$ et où le tenseur τ appartient à $\Lambda_7^2 \otimes \Lambda^1$. La dérivation covariante de Φ est le résultat de l'action de $\mathbf{K}_1(\Phi)$ sur le premier facteur Λ_{14}^2 de la composante dans $\Lambda_{14}^2 \otimes \Lambda^1$ de la connexion de Levi-Civita. Pour tout vecteur X, $D_X \Phi = -2\mathbf{K}_1(\Phi)\tau(X)$. Grâce au Lemme 2, nous pourrons exprimer τ au moyen du tenseur global $\tilde{\Phi}$, version complètement contravariante de Φ , opérant sur $D\Phi$, considérée comme 1-forme à valeurs tensorielles dans Λ^3 , par double contraction.

Rappelons qu'une connexion euclidienne est une connexion linéaire dans laquelle le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle [9 p. 101].

Définition 1. Nous appellerons connexion canonique de la variété riemannienne de type G_2 , la connexion euclidienne ϖ induite par la connexion de Levi-Civita π

$$\varpi_J^i = \pi_J^i + \frac{1}{2} \Phi^{abi} D \Phi_{abj}.$$

Proposition 1. Dans la connexion canonique d'une variété riemannienne de type G_2 , le tenseur métrique g, la 3-forme Φ et la 4-forme $*\Phi$ sont tous parallèles.

Preuve directe. La nouvelle connexion est *euclidienne* car de $\Phi^{abi}\Phi_{abj}=6\delta^i_j$ nous déduisons $D\Phi^{ab}_{}\Phi_{abj}+$
$$\begin{split} \Phi^{ab}_{i}D\Phi_{abj} &= 0 \text{ soit } \tau_{ji} + \tau_{ij} = 0. \\ \text{Calculons maintenant } \Phi^{ab1}D\Phi_{ab2} &= -\Phi^{ab1}(\pi^r_a\Phi_{rb2} + \pi^r_b\Phi_{ar2} + \pi^r_2\Phi_{abr}) : \end{split}$$

si
$$a = 2$$
 et $b = 4 - \Phi^{241} \left(\pi_2^1 \Phi_{142} + \pi_4^r \Phi_{2r2} + \pi_2^1 \Phi_{241} \right) = 0$;
si $a = 3$ et $b = 7 - \Phi^{371} \left(\pi_3^6 \Phi_{672} + \pi_7^5 \Phi_{352} + \pi_2^1 \Phi_{371} \right) = -\pi_3^6 - \pi_7^5 - \pi_2^1$;
si $a = 5$ et $b = 6 - \Phi^{561} \left(\pi_7^5 \Phi_{762} + \pi_6^3 \Phi_{532} + \pi_2^1 \Phi_{561} \right) = +\pi_5^7 + \pi_6^3 - \pi_2^1$.

Si on échange a et b, on a les mêmes résultats.

Finalement nous trouvons $-4(\pi_3^6 + \pi_7^5 + \pi_2^1)$ et par suite $\varpi_2^1 = \frac{2}{3}\pi_2^1 - \frac{1}{3}\pi_3^6 - \frac{1}{3}\pi_7^5$, mais aussi $\varpi_3^6 = \frac{2}{3}\pi_3^6 - \frac{1}{3}\pi_7^5 - \frac{1}{3}\pi_7^5$ $\frac{1}{3}\pi_2^1$ et $\varpi_7^5=\frac{2}{3}\pi_7^5-\frac{1}{3}\pi_2^1-\frac{1}{3}\pi_3^6$. Il en résulte que les éléments de la nouvelle connexion vérifient la relation

$$\varpi_2^1 + \varpi_3^6 + \varpi_7^5 = 0$$

ainsi que les six qu'on obtient par permutation circulaire (1234567) : ce sont justement les conditions pour que la dérivée covariante du tenseur Φ soit nulle [1]. \square

Remarque. La connexion que nous venons d'expliciter s'exprime aussi en fonction de la forme quartique extérieure $\Psi = *\Phi$ par

$$\varpi_J^i = \pi_J^i + \frac{1}{72} \Psi^{abci} D\Psi_{abcj}.$$

La torsion de cette connexion qui prend ses valeurs dans le G_2 -module $\Lambda_7^2 \otimes \Lambda_7^1$ dont la dimension totale soit 49 = 1 + 7 + 14 + 27, possède quatre composantes de G_2 -type distincts : les trois premières figurent dans Λ^3 égal à la somme directe des G_2 -modules Λ^3_1 , Λ^3_7 et Λ^3_{27} : c'est exactement la différentielle extérieure $d\Phi$, tandis que la première (encore) et la quatrième dans Λ^2 égal à la somme directe des G_2 -modules Λ^2_1 et Λ^2_{14} : c'est exactement la codifférentielle extérieure $\delta \Phi$. Nous en déduisons

Proposition 2. La torsion de la connexion canonique d'une variété riemannienne V_7 de type G_2 , est complètement antisymétrique si et seulement si la codifférentielle de la forme cubique extérieure Φ n'a pas de composante dans Λ^2_{14} .

Dans [8 p. 2] la variété V_7 munie de notre connexion canonique, avec de plus $\delta \Phi \in \Lambda^2_7$, est dite parallèle localement conforme.

3. Plaçons nous maintenant sur V_8

Décomposons la 1-forme de la connexion de Levi-Civita $\pi = \varpi + \tau$, où la nouvelle connexion ϖ prend ses valeurs dans $\Lambda^2_{21}\otimes \Lambda^1$ et où le tenseur τ appartient à $\Lambda^2_7\otimes \Lambda^1$. La dérivation covariante de Ω est le résultat de l'action de $\mathbf{K}_1(\Omega)$ sur le premier facteur Λ^2_{21} de la composante dans $\Lambda^2_{21} \otimes \Lambda^1$ de la connexion de Levi-Civita. Pour tout vecteur X, $D_X\Omega = 2\mathbf{K}_1(\Omega)\tau(X)$. Grâce au Lemme 4, nous pourrons exprimer τ au moyen du tenseur global $\tilde{\Omega}$, version complètement contravariante de Ω , opérant sur $D\Omega$, considérée comme 1-forme à valeurs tensorielles dans Λ^4 , par triple contraction.

Définition 2. Nous appellerons connexion canonique de la variété riemannienne de type Spin(7) la connexion euclidienne ϖ induite par la connexion de Levi-Civita π

$$\varpi_J^i = \pi_J^i + \frac{1}{96} \Omega^{abci} D \Omega_{abcj}.$$

Proposition 3. Dans la connexion canonique d'une variété riemannienne de type Spin(7), le tenseur métrique g et la 4-forme Ω sont tous parallèles.

Preuve directe. La nouvelle connexion est *euclidienne* car de $\Omega^{abc_l}\Omega_{abc_l} = 14\delta^l_l$ nous déduisons $D\Omega^{abc_l}\Omega_{abc_l} +$
$$\begin{split} &\Omega^{abc}_{i}D\Omega_{abc\,j}=0 \text{ soit } \tau_{j\imath}+\tau_{i\,j}=0.\\ &\text{Calculons maintenant } \Omega^{abc8}D\Omega_{abc\,1}=-\Omega^{abc8}(\pi^r_a\Omega_{rbc\,1}+\pi^r_b\Omega_{arc\,1}+\pi^r_c\Omega_{abr\,1}+\pi^r_1\Omega_{abcr}): \end{split}$$

si
$$a=1, b=2$$
 et $c=4-\Omega^{1248}(\pi_1^8\Omega_{8241}+\pi_b^r\Omega_{1rc1}+\pi_c^r\Omega_{1br1}+\pi_1^8\Omega_{1248})=0,$ de même pour $(1,3,7)$ ou $(1,5,6)$, si $a=2, b=3$ et $c=5-\Omega^{2358}(\pi_2^4\Omega_{4351}+\pi_3^7\Omega_{2751}+\pi_5^6\Omega_{2361}+\pi_1^8\Omega_{2358})=+\pi_2^4+\pi_3^7+\pi_5^6-\pi_1^8,$ de même pour $(3,4,6)$ ou $(4,5,7)$ ou $(6,7,2)$,

si on permute (a, b, c), on a les mêmes résultats.

Finalement nous trouvons $-24(\pi_4^2 + \pi_7^3 + \pi_6^5 + \pi_1^8)$ et par suite

$$\varpi_1^8 = \frac{3}{4}\pi_1^8 - \frac{1}{4}\pi_4^2 - \frac{1}{4}\pi_7^3 - \frac{1}{4}\pi_6^5.$$

Il en résulte que les éléments de la nouvelle connexion vérifient

$$\varpi_1^8 + \varpi_4^2 + \varpi_7^3 + \varpi_6^5 = 0$$

ainsi que les six qu'on obtient par permutation circulaire (1234567) : ce sont justement les conditions pour que la dérivée covariante du tenseur Ω soit nulle [1]. \square

La torsion de cette connexion qui prend ses valeurs dans le Spin(7)-module $\Lambda_7^2 \otimes \Lambda_8^1$ dont la dimension totale soit 56 = 8 + 48, possède deux composantes de Spin(7)-type distincts : on les retrouve dans Λ^3 égal à la somme directe des Spin(7)-modules Λ_8^3 et Λ_{48}^3 : c'est exactement la codifférentielle extérieure $\delta\Omega$. Nous en déduisons

Proposition 4. La torsion de la connexion canonique d'une variété riemannienne de type Spin(7) est complètement antisymétrique.

Dans ([8] p. 2), la variété V_8 munie de notre connexion canonique est alors dite parallèle localement conforme.

Références

- [1] E. Bonan, Sur les variétés riemanniennes à groupe d'holonomie G_2 ou Spin(7), C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966) 127–129.
- [2] E. Bonan, Sur certaines variétés presque hermitiennes quaternioniques, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 320 (1995) 981–984.
- [3] R.L. Bryant, Special structures and the octonians, J. Differential Geometry 17 (1982) 185-232.
- [4] R.L. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, Ann. Math. 126 (1987) 525-576.
- [5] M. Fernandez, A. Gray, Riemannian manifolds with structure group G_2 , Ann. Math. Pura Appl. 32 (1982) 19–45.
- [6] M. Fernandez, A classification of Riemannian manifolds with structure group Spin(7), Ann. Math. Pura Appl. 143 (1986) 101–122.
- [7] T. Friedrich, S. Ivanov, Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory, Asian J. Math. 6 (2) (2002) 303–335.
- [8] S. Ivanov, M. Parton, P. Piccini, Locally conformal parallel G₂ and Spin(7) manifolds, math.Dg/0509038 v3, 18 Sep 2005.
- [9] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, 1955.