

Logique/Combinatoire

Tournois indécomposables et leurs sous-tournois indécomposables à 5 sommets

Houmem Belkhechine^a, Imed Boudabbous^b

^a *Université du 7 novembre à Carthage, institut supérieur des sciences appliquées et de technologie de Mateur, route de Tabarka, 7030 Mateur, Tunisie*

^b *Université de Sfax, institut supérieur de biotechnologies, route de la Sokra Km 4, BP 38, 3080 Sfax, Tunisie*

Reçu le 18 octobre 2006 ; accepté le 27 octobre 2006

Disponible sur Internet le 6 décembre 2006

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie X de S est un intervalle de T lorsque pour tous $a, b \in X$ et $x \in S - X$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, \emptyset , $\{x\}(x \in S)$ et S sont des intervalles de T , appelés intervalles triviaux. Un tournoi dont tous les intervalles sont triviaux, est indécomposable ; sinon, il est décomposable. À un isomorphisme près, les tournois indécomposables à 5 sommets sont au nombre de trois. Nous les notons T_5 , U_5 et V_5 . On dit qu'un tournoi T abrite un tournoi T' si T' est isomorphe à un sous-tournoi de T . Cette Note consiste en une étude morphologique des tournois indécomposables, que nous présentons suivant les tournois indécomposables à 5 sommets qu'ils abritent. Nous caractérisons la classe \mathcal{T} des tournois indécomposables dont tous les sous-tournois indécomposables à 5 sommets sont isomorphes à T_5 et nous montrons que si un tournoi indécomposable, n'appartenant pas à la classe \mathcal{T} , abrite T_5 , alors il abrite V_5 et U_5 . **Pour citer cet article : H. Belkhechine, I. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Indecomposable tournaments and their indecomposable subtournaments on 5 vertices. Given a tournament $T = (V, A)$, a subset X of V is an interval of T provided that for every $a, b \in X$ and $x \in V - X$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$. For example, \emptyset , $\{x\}(x \in V)$ and V are intervals of T , called trivial intervals. A tournament, all the intervals of which are trivial, is indecomposable; otherwise, it is decomposable. Up to an isomorphism, there are exactly three indecomposable tournaments with 5 vertices denoted by T_5 , U_5 and V_5 . We say that a tournament T embeds in a tournament T' when T is isomorphic to a subtournament of T' . This Note consists of a morphologic study of indecomposable tournaments, which we present according to the indecomposable subtournaments with 5 vertices embedding in. We characterize the class \mathcal{T} of indecomposable tournaments, all indecomposable subtournaments with 5 vertices of which are isomorphic to T_5 and we prove that, if T_5 embeds in an indecomposable tournament T , not belonging to the class \mathcal{T} , then each of V_5 and U_5 embeds in T . **To cite this article : H. Belkhechine, I. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Préliminaires

1.1. Définitions

Un *tournoi* T est un couple (S, A) , où S est un ensemble fini, appelé ensemble des *sommets* de T , et A est un ensemble de couples de sommets distincts de T , appelé ensemble des *arcs* de T , vérifiant : pour tous $x \neq y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. Parfois il est commode de noter $S = S(T)$ et $A = A(T)$. À chaque partie X de S , est associé le *sous-tournoi* $T(X)$ de T , *induit* par X défini par $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$. Pour tout $x \in S$, on pose $V_T^-(x) = \{y \in S; (y, x) \in A\}$ et $V_T^+(x) = \{y \in S; (x, y) \in A\}$.

Un tournoi $T = (S, A)$ est un *ordre total*, lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Dans un tel cas, $x < y$ signifie $(x, y) \in A$.

Étant donnés deux tournois $T = (S, A)$ et $T' = (S', A')$, une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de T sur T' si pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que T et T' sont *isomorphes*. Un tournoi T abrite un tournoi T' si T' est isomorphe à un sous-tournoi de T .

À tout tournoi $T = (S, A)$ est associé son tournoi *dual* $T^* = (S, A^*)$, où $A^* = \{(x, y); (y, x) \in A\}$. Un tournoi est *autodual* s'il est isomorphe à son dual.

1.2. Tournois indécomposables

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* [3,5,8] (ou un *clan* [2] ou un ensemble *homogène* [4]) de T lorsque pour $a, b \in I$ et $x \in S - I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, \emptyset , $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T , appelés les intervalles *triviaux* de T . Un tournoi est *indécomposable* [5,8] (ou *primitif* [2]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire. Un tournoi indécomposable $T = (S, A)$ à au moins 5 sommets est dit *critique* si pour tout sommet x de T , le tournoi $T(S - \{x\})$ est décomposable. Afin de rappeler la caractérisation des tournois critiques, nous définissons, pour tout entier $n \geq 2$, les tournois T_{2n+1} , U_{2n+1} et V_{2n+1} définis sur $\{0, \dots, 2n\}$ comme suit.

- (i) $T_{2n+1}(\{0, \dots, n\}) = U_{2n+1}(\{0, \dots, n\}) = 0 < \dots < n$, $T_{2n+1}(\{n+1, \dots, 2n\}) = (U_{2n+1})^*(\{n+1, \dots, 2n\}) = n+1 < \dots < 2n$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, si $j \in \{i+1, \dots, n\}$ et si $k \in \{0, \dots, i\}$, alors $(j, i+n+1)$ et $(i+n+1, k)$ appartiennent à $A(T_{2n+1})$ et à $A(U_{2n+1})$.
- (ii) $V_{2n+1}(\{0, \dots, 2n-1\}) = 0 < \dots < 2n-1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $(2i+1, 2n)$ et $(2n, 2i)$ appartiennent à $A(V_{2n+1})$.

Proposition 1.1. (J.H. Schmerl et W.T. Trotter [8]) À un isomorphisme près, les seuls tournois critiques à au moins 5 sommets sont les tournois T_{2n+1} , U_{2n+1} et V_{2n+1} , où $n \geq 2$.

Enfin, désignons par \mathcal{T} (resp. \mathcal{U} , \mathcal{V}) la classe des tournois isomorphes à un certain T_{2n+1} (resp. U_{2n+1} , V_{2n+1}), avec $n \geq 2$.

2. Présentation des résultats

Cette Note porte sur la morphologie des tournois indécomposables, notre recherche étant centrée sur la notion d'abritement. Nous étudions ces tournois suivant leurs sous-tournois indécomposables à 5 sommets. Les tournois à 4 sommets sont tous décomposables. Notons alors, que les tournois indécomposables à 5 sommets sont, à un isomorphisme près, les trois tournois critiques T_5 , U_5 et V_5 . Nous établirons le théorème suivant.

Théorème 2.1. Soit T un tournoi indécomposable à au moins 6 sommets, n'appartenant pas à la classe \mathcal{T} . Si T abrite T_5 , alors T abrite chacun des tournois U_5 et V_5 .

Moyennant la caractérisation des tournois critiques par l'indécomposabilité et le non abritement de tournois indécomposables à 6 sommets [1], ce théorème aide à retrouver, plus simplement, le principal résultat de [7], à savoir

la caractérisation des tournois indécomposables n'abritant pas V_5 . Afin de rappeler cette caractérisation, nous introduisons les deux tournois indécomposables et autoduaux G_0 et H_0 définis respectivement sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par :

- (i) $G_0(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = U_5$ et $V_{G_0}^+(5) = \{1, 4\}$.
- (ii) $H_0(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) = G_0$ et $V_{H_0}^+(6) = \{0, 2, 4\}$.

Remarquons que H_0 est isomorphe au tournoi de Paley [6] à 7 sommets, que tous les sous-tournois à 6 sommets de H_0 sont isomorphes à G_0 , et que tous les sous-tournois à 5 sommets de G_0 sont isomorphes à U_5 .

Théorème 2.2. (B.J. Latka [7]) *Les tournois indécomposables à au moins 5 sommets n'abritant pas V_5 sont, à isomorphisme près, ceux de la classe $\{G_0, H_0\} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{U}$.*

En utilisant les Théorèmes 2.1 et 2.2, nous obtenons :

Corollaire 2.3. *Soit T un tournoi indécomposable à au moins 8 sommets.*

- (i) *L'ensemble des tournois de $\{T_5, U_5, V_5\}$, abrités par T , est distinct de $\{T_5, U_5\}$ et de $\{T_5, V_5\}$.*
- (ii) *Le tournoi T est dans la classe \mathcal{T} (resp. dans la classe \mathcal{U}) si et seulement si tous les sous-tournois indécomposables à 5 sommets de T sont isomorphes à T_5 (resp. isomorphes à U_5).*

En construisant quelques classes de tournois indécomposables, nous complétons comme suit :

Proposition 2.4. *Soient un entier $k \geq 8$ et $I \in \{\{V_5\}, \{U_5, V_5\}, \{T_5, U_5, V_5\}\}$. Pour chacune des trois valeurs possibles pour I , il existe un tournoi indécomposable T , à k sommets, tel que I est l'ensemble des tournois de $\{T_5, U_5, V_5\}$, abrités par T .*

3. Preuve du Théorème 2.1

Rappelons, tout d'abord, la proposition suivante :

Proposition 3.1. (A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg [2]) *Soit $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable. Si X est une partie de S telle que $|X| \geq 3$, $|S - X| \geq 2$ et $T(X)$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts x et y de $S - X$ tels que $T(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable.*

Pour la preuve du Théorème 2.1, nous utilisons, en outre, les résultats suivants.

Lemme 3.2. *Soient $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable à $2n + 2$ sommets ($n \geq 3$) et une partie $X = \{0, \dots, 2n\}$ de S tels que $T(X) = T_{2n+1}$. Il existe deux sommets distincts i et j de X tels que $T(S - \{i, j\})$ est indécomposable et $T(X - \{i, j\})$ est isomorphe à T_{2n-1} .*

B.J. Latka montre dans [7], que toute extension indécomposable d'un tournoi T_{2n+1} ($n \geq 2$), à un ou deux sommets, abrite le tournoi V_5 , lorsque l'extension n'est pas isomorphe à T_{2n+3} . Le Lemme 3.2 permet d'établir les deux propositions qui vont suivre et affirmer que de telles extensions abritent, de plus, le tournoi U_5 .

Proposition 3.3. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable à $2n + 2$ sommets ($n \geq 2$). Si T abrite T_{2n+1} alors T abrite chacun des tournois U_5 et V_5 .*

Preuve. Nous montrons, d'abord, qu'à un isomorphisme et à la dualité près, il existe exactement deux tournois indécomposables à 6 sommets, K et L , abritant T_5 . Nous les définissons sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ comme suit : $K(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = L(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = T_5$, $V_K^+(5) = \{0\}$ et $V_L^+(5) = \{0, 2\}$. On vérifie que les tournois $K(\{0, 1, 3, 4, 5\})$ et $L(\{0, 1, 3, 4, 5\})$ sont isomorphes à V_5 et que les tournois $K(\{0, 1, 2, 4, 5\})$ et $L(\{1, 2, 3, 4, 5\})$

sont isomorphes à U_5 . Ainsi le résultat de la proposition est vrai pour $n = 2$. Il suffit, maintenant, de raisonner par récurrence sur n , et d'appliquer le Lemme 3.2. \square

Proposition 3.4. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable à $2n + 3$ sommets, non isomorphe à T_{2n+3} ($n \geq 2$). Si T abrite T_{2n+1} , alors T abrite chacun des tournois U_5 et V_5 .*

Preuve. Il existe $X \subset S$ tel que $T(X)$ est isomorphe à T_{2n+1} . On peut supposer que $T(X) = T_{2n+1}$. Posons $X = \{0, 1, \dots, 2n\}$ et $\{\alpha, \beta\} = S - X$. Remarquons, d'abord, que si $T(X \cup \{\alpha\})$ est décomposable alors, ou bien X ou bien $\{\alpha, u\}$ ($u \in X$) est un intervalle de $T(X \cup \{\alpha\})$. Si $T(X \cup \{\alpha\})$ ou $T(X \cup \{\beta\})$ est indécomposable, alors la Proposition 3.3 permet de conclure. Autrement, moyennant des arguments de dualité et d'isomorphisme, la remarque ci-dessus permet de réduire la preuve à l'étude des deux cas suivants.

- Cas 1 : $\{\alpha, u\}$ est un intervalle de $T(X \cup \{\alpha\})$ ($u \in X$) et pour tout $a \in X$, $(\beta, a) \in A$. On montre que $T(S - \{u\})$ est indécomposable et on conclut, par la Proposition 3.3, qu'il abrite chacun des tournois U_5 et V_5 .
- Cas 2 : $\{\alpha, 0\}$ et $\{\beta, v\}$ ($v \in X - \{0\}$) sont des intervalles respectifs de $T(X \cup \{\alpha\})$ et $T(X \cup \{\beta\})$. Si $v \notin \{n, n + 1\}$, on montre que $T(S - \{v\})$ est indécomposable, et on conclut par la Proposition 3.3. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité, que $v = n$. Ainsi, sauf dans le cas où $\{(\alpha, 0), (n, \beta)\} \subset A$, pour lequel on montre que T est isomorphe à T_{2n+3} , $T(\{n - 1, \beta, n + 1, \alpha, 0\})$ (ou $T(\{1, n, 2n, \alpha, \beta\})$) est isomorphe à U_5 et $T(\{2n, 0, \alpha, 1, \beta\})$ (ou $T(\{1, \beta, n, n + 1, \alpha\})$) est isomorphe à V_5 . \square

Nous sommes à présent, en mesure de démontrer le résultat principal de ce papier.

Preuve du Théorème 2.1. Soit $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable à au moins 6 sommets et abritant T_5 . Supposons de plus que $T \notin \mathcal{T}$ et considérons une partie X de S , telle que $T(X) \in \mathcal{T}$, maximale (pour l'inclusion) parmi de telles parties. Comme $T \notin \mathcal{T}$, alors $S - X \neq \emptyset$. On distingue alors les deux cas suivants :

- Si $|S - X| = 1$, alors, d'après la Proposition 3.3, le tournoi T abrite chacun des tournois U_5 et V_5 .
- Si $|S - X| \geq 2$, alors, d'après la Proposition 3.1, il existe deux sommets distincts x et y de $S - X$ tels que $T(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable. Par maximalité de X , $T(X \cup \{x, y\}) \notin \mathcal{T}$. Par la Proposition 3.4, le tournoi $T(X \cup \{x, y\})$ abrite chacun des tournois U_5 et V_5 . Il en est de même pour le tournoi T . \square

Références

- [1] Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, *Discrete Math.* 223 (2000) 55–82.
- [2] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, *Theoret. Comput. Sci.* 3 (70) (1990) 343–358.
- [3] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), *Orders, Description and Roles*, North-Holland, 1984, pp. 313–342.
- [4] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* 18 (1967) 25–66.
- [5] P. Ille, Indecomposable graphs, *Discrete Math.* 173 (1997) 71–78.
- [6] W.M. Kantor, Automorphism groups of designs, *Math. Z.* 109 (1969) 246–252.
- [7] B.J. Latka, A structure theorem of tournaments omitting N_5 , *J. Graph Theory* 42 (2003) 165–192.
- [8] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, *Discrete Math.* 113 (1993) 191–205.