Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 97–102
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles/Problèmes mathématiques de la mécanique

Sur la régularité des solutions des équations de Navier–Stokes dans un domaine périodique de faible épaisseur

Igor Kukavica, Mohammed Ziane

Department of Mathematics, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA

Reçu le 23 juillet 2006 ; accepté le 2 novembre 2006

Disponible sur Internet le 18 décembre 2006

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note, nous étudions la régularité globale des solutions des équations de Navier–Stokes dans un domaine de faible épaisseur $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, \epsilon]$ avec des conditions aux limites périodiques. Nous montrons que si $\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(L_1, L_2, \delta)/\epsilon^{1/2-\delta}$, où u_0 est la donnée initiale et $\delta > 0$ est arbitraire, alors il existe une solution régulière globale avec la donnée initiale u_0. Cette condition améliore les résultats existants, en particulier la moyenne de la vitesse initiale dans la direction de l'épaisseur faible n'est pas supposée petite quand l'épaisseur est petite. ***Pour citer cet article : I. Kukavica, M. Ziane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

On the regularity of the solutions of the Navier–Stokes equation in a thin periodic domain. In this Note, we study the global regularity of solutions of the Navier–Stokes equations in a thin domain $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, \epsilon]$ with periodic boundary conditions. We prove that if $\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(L_1, L_2, \delta)/\epsilon^{1/2-\delta}$ where u_0 is the initial datum and $\delta > 0$ is arbitrary, then there exists a unique global smooth solution with the initial datum u_0. This condition improves on the existing results, in particular, the average in the thin direction of the initial velocity is not necessarily small when the thickness is small. ***To cite this article: I. Kukavica, M. Ziane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

In this Note, we address the global existence and uniqueness of solutions of the Navier–Stokes equations:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \nu \Delta u_k + \sum_{j=1}^{3} \partial_j (u_j u_k) + \partial_k p = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

with $\nabla \cdot u = 0$, in a domain $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, \epsilon]$, where $L_1, L_2 > 0$ and $\epsilon \in (0, 1/2)$ with periodic boundary conditions and an initial condition $u(\cdot, t) = u_0$. As usual, we additionally require $\int_\Omega u(\cdot, t) = \int_\Omega u(x, t)\,\mathrm{d}x = 0$

Adresses e-mail : kukavica@usc.edu (I. Kukavica), ziane@usc.edu (M. Ziane).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.11.019

for all $t \geqslant 0$. The problem of global existence of a strong solution for large initial data is still open. There are, however, several sufficient conditions on the size of the initial velocity which guarantee the global existence of strong solutions. In [7], Raugel and Sell proved that the global existence of a strong solution holds for a large class of data $R(\epsilon)$. Subsequent works [1–3,6,8] complemented and extended these results. For $v \in L^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$, denote $(Mv)(x_1, x_2) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_3$ and $Nv = v - Mv$. By [7], a global strong solution exists under the conditions $\|\nabla Mu_0\|_{L^2} \leqslant D^{-1}\epsilon^{7/24+\delta}(\log(1/\epsilon))^\delta$, and $\|\nabla Nu_0\|_{L^2} \leqslant D^{-1}\epsilon^{-5/48+\delta}(\log(1/\epsilon))^\delta$ where $\delta > 0$ is arbitrary, and D depends on L_1, L_2, and δ. Afterwards, Iftimie and Raugel proved in [3] that the global solution exists if $\|Mu_0\|_{H^1} \leqslant D/\epsilon^\beta$, $\|(Mu_0)_3\|_{L^2} \leqslant D\epsilon^\beta$ and $\|Nu_0\|_{H^{1/2}} \leqslant D\epsilon^{1/4-\beta/2}$ for any $\beta \in [0, 1/2]$. More recently, the authors of the present Note obtained in [4] the global existence of regular solutions under the condition $\|u_0\|_{H^1} \leqslant D/\epsilon^{1/6}$, Based on the Dirichlet boundary conditions results and scaling considerations, optimal results was however hoped to be the one with power $1/2$ of the exponent of ϵ. This is what we achieve in the present Note. Namely, we prove the following:

Theorem 0.1. *Let $\delta_0 > 0$ and $\alpha \in [3, \infty)$ be arbitrary.*

(i) *There exists a constant $C_0(L_1, L_2, \alpha, \delta_0) > 0$ with the following property. If $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03}) \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$ satisfies $\|\nabla u_{0k}\|_{L^2} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{1/2-\delta_0}$ for $k = 1, 2$, and $\|u_{03}\|_{L^\alpha} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha}$, then there exists a unique smooth solution $u(\cdot, t)$ with the initial datum u_0 which is defined for all $t > 0$.*
(ii) *There exists a constant $C_0(L_1, L_2, \delta_0) > 0$ such that if $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{1/2-\delta_0}$, then there exists a unique global smooth solution $u(\cdot, t)$ with the initial datum u_0 which is defined for all $t > 0$.*

Theorem 0.1 gives immediately the following consequence regarding certain class of large initial data in a domain $\Omega_0 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ which is not necessarily thin.

Corollary 0.2. *Let $\Omega_0 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$, and $\delta > 0$ be arbitrary. There exists a constant $C > 0$ depending only on δ, L_1, L_2, and L_3 with the following property: Assume u_0 is ϵ-periodic in the x_3 direction where $L_3/\epsilon \in \mathbb{N}$. If $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant C\nu/\epsilon^{1-\delta}$ and $\int_{\Omega_0} u_0 = 0$, then there exists a unique smooth solution $u(\cdot, t)$ with the initial datum u_0 which is defined for all $t \geqslant 0$.*

Proof. We shall give a sketch of the proof of Theorem 0.1, and refer the reader to the manuscript [5] for details. Without loss of generality, we set $\nu = 1$. The first part of the proof consists in establishing that if $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03}) \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$ satisfies $\|\nabla u_{0k}\|_{L^2} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{1/2-\delta_0}$, for $k = 1, 2$, and $\|u_{03}\|_{L^\alpha} \leqslant C\nu/\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha}$, then there exists a unique smooth solution $u(\cdot, t)$. The second part uses a small time argument to show that if the initial condition satisfies $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{1/2-\delta_0}$, then there exists a small time at which the solution satisfies the condition of the first part, and therefore it is globally smooth. The proof of the first part is based on coupled estimates on the quantities:

$$J(t) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \|\partial_i u_k\|_{L_t^\infty L_x^2(\Omega\times[0,t])} + \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \|\partial_{ij} u_k\|_{L_t^2 L_x^2(\Omega\times[0,t])},$$

and

$$K(t) = \left(\left\||u_3|^{\alpha/2}\right\|_{L_t^\infty L_x^2(\Omega\times[0,t])} + \left\|\nabla\left(|u_3|^{\alpha/2}\right)\right\|_{L_t^2 L_x^2(\Omega\times[0,t])}\right)^{2/\alpha}.$$

The estimates for $J(t)$ are obtained by multiplying the equation $(\mathrm{NSE})_k$, where $k = 1, 2$, by $-\Delta u_k$, integrating, and summing. Similarly to [4], we obtain:

$$J(t)^2 \leqslant C\epsilon^{1/2} J(t)^3 + C\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha} K(t) J(t)^2 + CJ(0)^2, \quad t \in (0, T_{\max}),$$

where $T_{\max}$ is the maximal time of existence of the solution. The estimates for $K(t)$ are obtained by multiplying the equation $(\mathrm{NSE})_3$ by $|u_3|^{\alpha-2}u_3$ and integrating with respect to space and time. The term involving the pressure is decomposed into four terms using the decomposition $u = Mu + Nu$ as in [4]; then using anisotropic Sobolev inequalities we obtain (see the French version and [5] for details)

$$K(t) \leqslant C_1\epsilon^{3/\alpha^2-\delta} J(t)^{2/\alpha} K(t)^{1-1/\alpha} + C_1\epsilon^{1/2\alpha-\delta} J(t)^{1/\alpha} K(t) + C_1 K(0),$$

where $\delta > 0$ is arbitrary. The end of the proof is based on a contradiction argument which shows that the maximal time of existence of the solution is infinite. See the manuscript [4] for details. □

1. Introduction

Dans cette Note, nous étudions l'existence globale des solutions régulières des équations de Navier–Stokes en trois dimensions dans un domaine de faible épaisseur $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, \epsilon]$, où $L_1, L_2 > 0$ et $\epsilon \in (0, 1/2)$,

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \nu \Delta u_k + \sum_{j=1}^{3} \partial_j (u_j u_k) + \partial_k p = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

et $\nabla \cdot u = 0$, avec des conditions aux limites péridiques et la condition initiale $u(\cdot, t) = u_0$. Nous imposons aussi $\int_\Omega u(\cdot, t) = \int_\Omega u(x, t)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

L'existence des solutions fortes sur un interval maximal $[0, T_{\max})$ est connu depuis les travaux de Leray, cependant le problème d'existence globale des solutions fortes pour des données initiales grandes dans $H^1(\Omega)$ reste encore ouvert. Ceci dit, il existe plusieurs résultats donnant des conditions sur la vitesse initiale qui guarantissent l'existence globale des solutions fortes. Dans [7] Raugel et Sell ont montré l'existence globale pour une grande classe de données initiales, et leurs résultats ont été améliorés dans les travaux [1–4,6,8].

Pour $v \in L^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$, notons :

$$(Mv)(x_1, x_2) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon v(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_3 \quad \text{et} \quad Nv = v - Mv.$$

Le symbole D, ci-dessous, est une constante qui dépend de L_1, L_2, et ν. Raugel et Sell [7], ont montré l'existence globale des solutions fortes sous les conditions $\|\nabla M u_0\|_{L^2} \leqslant D^{-1}\epsilon^{7/24+\delta}(\log(1/\epsilon))^\delta$ et $\|\nabla N u_0\|_{L^2} \leqslant D^{-1}\epsilon^{-5/48+\delta}(\log(1/\epsilon))^\delta$, où $\delta > 0$ est arbitraire, et D dépends aussi de δ. Iftimie a montré l'éxistence globale des solutions régulières sous les conditions $\|\nabla M u_0\|_{L^2} \leqslant D^{-1}\epsilon^{1/2}\sqrt{\log(1/\epsilon)}$ et $\|\nabla N u_0\|_{L^2} \leqslant D^{-1}\epsilon^{-1/2+\delta}$, [2], alors que Montgomery-Smith a montré l'existence globale sous la condition $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant 1/D$, [6]. Plus récemment, Iftimie et Raugel ont montré dans [3] que la solution globale existe si

$$\|M u_0\|_{H^1} \leqslant D/\epsilon^\beta, \quad \big\|(M u_0)_3\big\|_{L^2} \leqslant D\epsilon^\beta \quad \text{et} \quad \|N u_0\|_{H^{1/2}} \leqslant D\epsilon^{1/4-\beta/2},$$

où $\beta \in [0, 1/2]$. Notons que dans tous ces résultats une partie Mu_0 ou Nu_0 de u_0 est petite. Dans [4], nous avons montré que la solution globale existe si $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant D/\epsilon^{1/6}$. Ce résultat est le premier où aucune partie de la condition initiale n'est supposée petite. Ceci étant, l'exposant $1/6$ ne paraît pas optimal. En effet, dans le cas des condition aux limites de type Dirichlet ou de type frontière libre, l'existence globale des solutions régulières est assurée si $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant D/\epsilon^{1/2}$ [3,8]. La présente Note donne le résultat d'existence globale des solutions régulières pour les équations de Navier–Stokes, avec des condition aux limites périodiques, sous la condition $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant D/\epsilon^{1/2-\delta_0}$, où $\delta_0 > 0$ est une constante arbitraire. Plus précisément, nous montrons :

Théorème 1.1. *Soient $\delta_0 > 0$ et $\alpha \in [3, \infty)$ deux constantes arbitraires.*

(i) *Il existe une constante $C_0(L_1, L_2, \alpha, \delta_0) > 0$ telle que si $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03}) \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$ vérifie :*

$$\|\nabla u_{0k}\|_{L^2} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{1/2-\delta_0}, \quad k = 1, 2, \quad \textit{et} \quad \|u_{03}\|_{L^\alpha} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha}, \tag{1}$$

alors, il existe une solution régulière unique $u(\cdot, t)$ avec la condition initiale u_0, qui est défine pour tout $t \geqslant 0$.

(ii) *Il existe une constante $C_0(L_1, L_2, \delta_0) > 0$ telle que si,*

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant C_0\nu/\epsilon^{1/2-\delta_0}, \tag{2}$$

alors, il existe une solution régulière unique $u(\cdot, t)$ avec la condition initiale u_0, qui est défine pour tout $t \geqslant 0$.

Théorème 1.1 implique le résultat suivant concernant l'existence globale des solutions régulières pour une certaine classe de grandes données initiales dans un domaine $\Omega_0 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ qui n'est pas nécessairement de faible épaisseur.

Corollaire 1.2. *Soit $\Omega_0 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$, et $\delta > 0$ quelconque. Il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de δ, L_1, L_2, et L_3 avec la propriété suivante : Supposons que u_0 est ϵ-périodique dans la direction x_3 où $L_3/\epsilon \in \mathbb{N}$. Si $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant C\nu/\epsilon^{1-\delta}$ et $\int_{\Omega_0} u_0 = 0$, alors il existe une unique solution régulière $u(\cdot, t)$ définie pout tout $t \geqslant 0$ avec la donnée initiale u_0.*

2. Démonstration du théorème

Nous montrons d'abord que si la condition (1) est satisfaite, alors la solution est régulière pour tout temps. Ensuite, on montre que si la condition (2) est satisfaite, alors il existe un temps t_1 plus petit que $T_{\max}$ tel que la condition (1) est satisfaite et nous concluons que la solution reste régulière pour tout t. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\nu = 1$. La démonsration utilise des estimations couplées des deux quantités

$$J(t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \|\partial_i u_k\|_{L_t^\infty L_x^2(\Omega\times[0,t])} + \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \|\partial_{ij} u_k\|_{L_t^2 L_x^2(\Omega\times[0,t])},$$

et

$$K(t) = \left(\left\| |u_3|^{\alpha/2} \right\|_{L_t^\infty L_x^2(\Omega\times[0,t])} + \left\| \nabla\left(|u_3|^{\alpha/2}\right) \right\|_{L_t^2 L_x^2(\Omega\times[0,t])} \right)^{2/\alpha}.$$

2.1. *Estimation a priori de $J(t)$*

Pour estimer $J(t)$, nous multiplions l'équation $(\mathrm{NSE})_k$, pour $k = 1, 2$, par $-\Delta u_k$, après addition et intégration nous obtenons $J^2 \leqslant J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + CJ(0)^2$, où

$$J_1 = \sum_{i,j,k=1}^{2} \iint u_j \partial_j u_k \partial_{ii} u_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \iint \partial_i u_j \partial_i u_j \partial_3 u_3 - \iint \partial_1 u_1 \partial_2 u_2 \partial_3 u_3 + \iint \partial_1 u_2 \partial_2 u_1 \partial_3 u_3,$$

$J_2 = \sum_{j,k=1}^{2} \iint u_j \partial_j u_k \partial_{33} u_k$, $J_3 = \sum_{k=1}^{2} \iint u_3 \partial_3 u_k \Delta u_k$, et $J_4 = -\sum_{k=1}^{2} \iint \Delta p \partial_k u_k$. Les termes J_1 et J_2 se traitent comme dans [4] et on trouve $J_1, J_2 \leqslant C\epsilon^{1/2} J(t)^3$, alors que pour J_3, on écrit :

$$\begin{aligned} J_3 = \sum_{k=1}^{2} \iint u_3 \partial_3 u_k \Delta u_k &\leqslant \sum_{k=1}^{2} \|u_3\|_{L_t^\infty L_x^\alpha} \|\partial_3 u_k\|_{L_t^2 L_x^{2\alpha/(\alpha-2)}} \|\Delta u_k\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &\leqslant C \|\partial_3 u_k\|_{L_t^2 L_x^{2\alpha/(\alpha-2)}} J(t) K(t). \end{aligned}$$

Nous utilisons alors $\|\partial_3 u_k(\cdot, t)\|_{L_t^2 L_x^a} \leqslant C\epsilon^{(6-a)/2a} J(t)$ pour $k = 1, 2, 3$ et $2 \leqslant a \leqslant 6$ (voir [4]), et nous obtenons $J_3 \leqslant C\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha} K(t) J(t)^2$. Finalement le terme J_4 s'estime comme ci-dessus et donne $J_4 \leqslant C\epsilon^{1/2} J(t)^3 + C\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha} K(t) J(t)^2$. En regroupant les estimations ci-dessus, nous arrivons à :

$$J(t)^2 \leqslant C\epsilon^{1/2} J(t)^3 + C\epsilon^{(\alpha-3)/\alpha} K(t) J(t)^2 + CJ(0)^2, \quad t \in (0, T_{\max}). \tag{3}$$

2.2. *Estimation a priori de $K(t)$*

Nous multiplions $(\mathrm{NSE})_3$ par $|u_3|^{\alpha-2} u_3$ et nous intégrons pour obtenir

$$\frac{1}{\alpha} \int |u_3|^\alpha \Big|_t + \frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{3} \iint \partial_j\left(|u_3|^{\alpha/2}\right) \partial_j\left(|u_3|^{\alpha/2}\right) = -\iint \partial_3 p\, u_3 |u_3|^{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha} \int |u_{30}|^\alpha$$

pour tout $t \in (0, T_{\max})$. En utilisant les transformés de Riesz standards R_1, R_2, et R_3, nous pouvons écrire $\partial_3 p = \sum_{k=1}^{3} q_k$, où

$$q_1 = 2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} R_i R_j (\partial_3 u_i N u_j), \quad q_2 = 2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} R_i R_j (\partial_3 u_i M u_j), \quad q_3 = 2 \sum_{i=1}^{3} R_i R_3 (\partial_3 u_i u_3),$$

et donc

$$\iint \partial_3 p\, u_3|u_3|^{\alpha-2} = \iint q_1 u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2} N\big(|u_3|^{\alpha/2}\big) + \iint q_1 u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2} M\big(|u_3|^{\alpha/2}\big) + \iint q_2 u_3|u_3|^{\alpha-2} + \iint q_3 u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2} N\big(|u_3|^{\alpha/2}\big) + \iint q_3 u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2} M\big(|u_3|^{\alpha/2}\big) = \sum_{i=1}^{5} K_i.$$

Maintenant nous estimons les termes K_i pour $i = 1, \dots, 4$. D'abord, nous avons :

$$|K_1| \leqslant \|q_1\|_{L_t^2 L_x^{3\alpha/(\alpha+3)}} \big\|u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2}\big\|_{L_t^\infty L_x^{2\alpha/(\alpha-2)}} \big\|N\big(|u_3|^{\alpha/2}\big)\big\|_{L_t^2 L_x^6}.$$

Nous remarquons d'abord que $\|N(|u_3|^{\alpha/2})\|_{L_t^2 L_x^6} \leqslant C\|\nabla(|u_3|^{\alpha/2})\|_{L_t^2 L_x^2} \leqslant CK(t)^{\alpha/2}$, de plus comme $\alpha \geqslant 3$, nous avons $2 \leqslant 6\alpha/(\alpha+6) \leqslant 6$, $\|q_1\|_{L_t^2 L_x^{3\alpha/(\alpha+3)}} \leqslant C\epsilon^{3/\alpha} J(t)^2$ et alors $|K_1| \leqslant C\epsilon^{3/\alpha} J(t)^2 K(t)^{\alpha-1}$. Pour estimer K_2, choisissons un nomber $b \geqslant 2\alpha$ et un nombre $r_1 \in [2\alpha/(\alpha+1), 2)$, tels que $1/r_1 + (\alpha-2)/2\alpha + 1/b = 1$, et nous écrivons $|K_2| \leqslant \|q_1\|_{L_t^2 L_x^{r_1}} \|u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2}\|_{L_t^\infty L_x^{2\alpha/(\alpha-2)}} \|M(|u_3|^{\alpha/2})\|_{L_t^2 L_x^b}$. En suivant [4], nous avons :

$$\big\|M\big(|u_3|^{\alpha/2}\big)\big\|_{L_t^2 L_x^b} \leqslant Cb\epsilon^{-(b-2)/2b} K(t)^{\alpha/2} \quad \text{et} \quad \big\|u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2}\big\|_{L_t^\infty L_x^{2\alpha/(\alpha-2)}} \leqslant CK(t)^{(\alpha-2)/2}.$$

De plus $\|q_1\|_{L_t^2 L_x^{r_1}} \leqslant C\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \|\partial_3 u_i\|_{L_t^2 L_x^{r_2}} \|Nu_j\|_{L_t^\infty L_x^{r_2}} \leqslant C\epsilon^{(6-r_2)/r_2} J(t)^2$, où $r_2 = 2r_1$, ce qui donne $|K_2| \leqslant Cb\epsilon^{3/\alpha-2/b} J(t)^2 K(t)^{\alpha-1}$. Pour estimer K_3, nous écrivons :

$$K_3 = -\frac{(2\alpha-2)}{\alpha} \iint \tilde{q}_2\big(|u_3|^{(\alpha-4)/2} u_3\big)\partial_3\big(|u_3|^{\alpha/2}\big), \quad \text{où} \quad \tilde{q}_2 = 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} R_i R_j (Nu_i Mu_j),$$

d'où $|K_3| \leqslant C\|\tilde{q}_2\|_{L_t^2 L_x^\alpha} \|u_3|u_3|^{(\alpha-4)/2}\|_{L_t^\infty L_x^{2\alpha/(\alpha-2)}} \|\partial_3(|u_3|^{\alpha/2})\|_{L_t^2 L_x^2} \leqslant C\|\tilde{q}_2\|_{L_t^2 L_x^\alpha} K(t)^{\alpha-1}$. Posons $r_3 = \frac{\alpha b}{b-\alpha}$, et notons que $\|Mu_j\|_{L_t^\infty L_x^b} \leqslant Cb\epsilon^{-(b-2)/2b} J(t)$ pour $j = 1, 2$, et $\|Nu_i\|_{L_t^2 L_x^{r_3}} \leqslant C\epsilon^{(6+r_3)/2r_3} J(t)$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous avons alors $|K_3| \leqslant Cb\epsilon^{3/\alpha-2/b} J(t)^2 K(t)^{\alpha-1}$. De façon similaire, nous pouvons montrer que $|K_4| \leqslant C\epsilon^{1/2} J(t)K(t)^\alpha$ et $|K_5| \leqslant Cb\epsilon^{1/2-2/b} J(t)K(t)^\alpha$. En conclusion, nous arrivons à l'inégalité :

$$K(t)^\alpha \leqslant Cb\epsilon^{3/\alpha-2/b} J(t)^2 K(t)^{\alpha-1} + C\epsilon^{1/2} J(t)K(t)^\alpha + Cb\epsilon^{1/2-2/b} J(t)K(t)^\alpha + CK(0)^\alpha.$$

Choisissons $b = 2\alpha + |\log\epsilon|$, nous avons :

$$K(t) \leqslant C_1|\log\epsilon|^{1/\alpha}\epsilon^{3/\alpha^2} J(t)^{2/\alpha} K(t)^{1-1/\alpha} + C_1|\log\epsilon|^{1/\alpha}\epsilon^{1/2\alpha} J(t)^{1/\alpha} K(t) + C_1 K(0) \tag{4}$$

et rapellons que d'après (3)

$$J(t) \leqslant C_1\epsilon^{1/4} J(t)^{3/2} + C_1\epsilon^{(\alpha-3)/2\alpha} K(t)^{1/2} J(t) + C_1 J(0), \tag{5}$$

pour tout $t \in (0, T_{\max})$.

2.3. *Fin de la démonstration*

Les estimations couplées de $J(t)$ et $K(t)$ données par (5) et (4) vont nous permettre, en utilisant un argument par contradiction de démontrer Théorème 1.1 dans le cas de la condition (1). Pour ce, supposons que $\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \|\partial_i u_{0k}\|_{L^2} \leqslant C_2^{-1}\epsilon^{-1/2+\delta_0}$ et $\|u_{03}\|_{L^\alpha} \leqslant C_2^{-1}\epsilon^{-(\alpha-3)/\alpha}$, alors il est facile de voir que si la constante C_2 est assez grande, alors

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\big\|\partial_i u_k(\cdot,t)\big\|_{L^2} \leqslant \frac{2C_1}{C_2\epsilon^{1/2-\delta_0}} \quad \text{et} \quad \big\|u_3(\cdot,t)\big\|_{L^\alpha} \leqslant \frac{2C_1}{C_2\epsilon^{(2a-3)/2a}}$$

pour tout $t \in (0, T_{\max})$, ce qui implique que $T_{\max} = \infty$.

Dans le cas de la condition (2), nous montrons l'existence d'un temps t_0 tel que la solution forte vérifie au moment t_0 la condition (1). Pour cela, nous faisons des estimations à priori sur $\|\nabla u\|_{L^2}$. En utilisant la décomposition $u =$

$Mu + Nu$ dans le terme non linéaire et les inégalités de Sobolev et Agmon anisotropes (voir [8]) nous obtenons facilement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{C}{\epsilon}\|\nabla u\|_{L^2}^4 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6.$$

Et puis par une application du Lemme de Gronwall, nous montrons que si $\|\nabla u_0\|_{L^2} \leqslant C_0\epsilon^{\delta_0-1/2}$ avec $C_0 \leqslant 1/2$, $\delta_0 > 0$ assez petit, alors $\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2} \leqslant 2C_0\epsilon^{\delta_0-1/2}$ pour $t \in [0,t_0]$, où $t_0 = \epsilon^2/64C_0^2C_1\epsilon^{6\delta_0}$.

De plus :

$$\int_0^{t_0} \big\|\Delta u(\cdot,\tau)\big\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{CC_0^2}{\epsilon^{1-2\delta_0}}.$$

Ce qui implique l'existence d'un temps $t_1 \in (0,t_0)$ tel que $\|Nu(\cdot,t_1)\|_{L^\infty} \leqslant CC_0\epsilon^{-1+4\delta_0}$, et donc par interpolation, nous avons $\|Nu(\cdot,t_1)\|_{L^\alpha} \leqslant CC_0\epsilon^{-(\alpha-3)/\alpha}$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalite de Gagliardo–Nirenberg, nous obtenons $\|Mu(\cdot,t_1)\|_{L^\alpha} \leqslant CC_0\epsilon^{-(\alpha-3)/\alpha}$ si $\alpha \geqslant 2/\delta_0$. Nous sommes alors en mesure d'appliquer la première partie de la démonstration et nous concluons que la solution reste régulière pour tout t.

Nous terminons par les deux remarques suivantes qui donnent des généralisations du Théorème 1.1.

Remarque 1. Une variante de la fin de la démonstration du théorème qui consiste à obtenir des estimation sur $\|(-\Delta)^{1/4}u\|_{L^2}$ au lieu de $\|\nabla u\|_{L^2}$ donne facilement un résultat de régularité globale de la solution quand la condition initiale satisfait $\|u_0\|_{H^{1/2}} \leqslant \nu C_0/|\log\epsilon|$, où C_0 est une constante assez petite.

(Voir [5] pour plus de details.)

Remarque 2. Un démarche similaire à celle de [4] nous permet de montrer un résultat de régularité globale des solutions, sous les hypothèses du Théorème 1.1, dans le cas où il y a une force $f = (f_1, f_2, f_3)$. Par exemple, si la condition (1) a lieu et si $\sup_{k=1,2}\|f_k\|_{L_t^\infty L_x^2} \leqslant \nu^2/(D_0|\log\epsilon|\epsilon^{1/2})$ et $\|f_3\|_{L_t^\infty L_x^{3\alpha/\alpha+3}} \leqslant \nu^2/(D_0\epsilon^{(4\alpha-9)/3\alpha})$, alors la solution forte est globale. Pour plus de details voir [5].

Remerciements

Igor Kukavica et Mohammed Ziane ont bénéficié pour mener ces travaux d'un soutien partiel des bourses DMS-0604886 et DMS-0505974, respectivement, de la National Science Foundation des États-Unis.

Références

[1] I. Gallagher, The tridimensional Navier–Stokes equations with almost bidimensional data: stability, uniqueness, and life span, Internat. Math. Res. Notices 18 (1997) 919–935.
[2] D. Iftimie, The 3D Navier–Stokes equations seen as a perturbation of the 2D Navier–Stokes equations, Bull. Soc. Math. France 127 (1999) 473–517.
[3] D. Iftimie, G. Raugel, Some results on the Navier–Stokes equations in thin 3D domains, J. Differential Equations 169 (2001) 281–331.
[4] I. Kukavica, M. Ziane, Regularity of the Navier–Stokes equation in a thin domain with large data, Discrete Contin. Dyn. Syst. 16 (2006) 67–86.
[5] I. Kukavica and M. Ziane, On the Navier–Stokes equation in a thin periodic domain, en préparation.
[6] S. Montgomery-Smith, Global regularity of the Navier–Stokes equation on thin three dimensional domains with periodic boundary conditions, Electronic J. Differential Equations 11 (1999) 1–19.
[7] G. Raugel, G.R. Sell, Navier–Stokes equations on thin 3D domains. I. Global attractors and global regularity of solutions, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 503–568.
[8] R. Temam, M. Ziane, Navier–Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions, Adv. Differential Equations 1 (1996) 499–546.