Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 363–366
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Remarques sur l'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel

Fabien Marchand [a], Marius Paicu [b]

[a] *Département de mathématiques, université d'Evry, boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry cedex, France*
[b] *Département de mathématiques, université Paris Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France*

Reçu le 10 janvier 2007 ; accepté le 16 janvier 2007

Disponible sur Internet le 20 février 2007

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Nous donnons un résultat d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel ; la classe d'unicité considérée est $L^2((0,T),\dot H^{1/2})\cap\mathcal{C}([0,T),\mathcal{M}_{1/2})$ où $\mathcal{M}_{1/2}$ est l'espace des multiplicateurs ponctuels de $\dot H^{1/2}$ dans $\dot H^{-1/2}$. Nous donnons aussi une preuve trés simple de l'unicité des solutions $\mathcal{C}([0,T),L^3)$. ***Pour citer cet article : F. Marchand, M. Paicu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Remarks on the uniqueness for the three-dimensional Navier–Stokes system. We give a result of uniqueness for the three-dimensional Navier–Stokes system; the class of uniqueness that we consider is $L^2((0,T),\dot H^{1/2})\cap\mathcal{C}([0,T),\mathcal{M}_{1/2})$ where $\mathcal{M}_{1/2}$ is the space of pointwise multipliers from $\dot H^{1/2}$ to $\dot H^{-1/2}$. We also give a very simple proof to the uniqueness of solutions in $\mathcal{C}([0,T),L^3)$. ***To cite this article: F. Marchand, M. Paicu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Le but de cette Note est de démontrer un théorème d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel :

$$\begin{cases}\partial_t u+\nabla\cdot(u\otimes u)-\Delta u+\nabla p=0,\\ \operatorname{div} u=0,\\ u(0,\cdot)=u_0\end{cases}\tag{1}$$

où $\nabla\cdot(u\otimes u)_j=\sum_{k=1}^3\partial_k(u_ju_k)$, u désignant un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ et le scalaire p étant la pression.

Nous montrons aussi que le cadre fonctionnel utilisé permet de redémontrer de façon trés simple le théorème d'unicité de Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo [3] pour des solutions $\mathcal{C}([0,T),L^3)$ des équations de Navier–Stokes.

Adresses e-mail : fabien.marchand@univ-evry.fr (F. Marchand), marius.paicu@math.u-psud.fr (M. Paicu).

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.01.014

L'utilisation des espaces de multiplicateurs pour étudier le problème de l'unicité pour les équations de Navier–Stokes a été introduite par Lemarié-Rieusset [5] et aussi utilisée par Germain [4]. Commençons par rappeler ce qu'est un espace de multiplicateurs (ponctuels) :

Définition 1. Soient $r \geqslant s$ deux réels appartenant à $(-3/2, 3/2)$. On définit l'espace $\mathcal{M}(\dot{H}^r(\mathbb{R}^3), \dot{H}^s(\mathbb{R}^3))$ comme l'espace des distributions tempérées f telles qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$\|\varphi f\|_{\dot{H}^s} \leqslant C\|\varphi\|_{\dot{H}^r}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.

La norme sur $\mathcal{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)$ est alors donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} \frac{\|\varphi f\|_{\dot{H}^s}}{\|\varphi\|_{\dot{H}^r}}.$$

On a les deux propriétés immédiates suivantes (voir [8]) :

$$\mathcal{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s) = \mathcal{M}(\dot{H}^{-s}, \dot{H}^{-r}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s) \hookrightarrow \dot{B}_\infty^{r-s,\infty}.$$

On notera en particulier $\mathcal{M}_{1/2} = \mathcal{M}(\dot{H}^{1/2}, \dot{H}^{-1/2}) = (-\Delta)^{1/4}\mathcal{M}(\dot{H}^{1/2}, L^2)$ (voir [9]) et $\widetilde{\mathcal{M}}_{1/2}$ l'adhérence de l'espace des fonctions tests, $\mathcal{D}$, dans $\mathcal{M}_{1/2}$. L'intérêt de l'espace $\mathcal{M}_{1/2}$ tient tout d'abord à son invariance par le changement d'échelle de l'équation ($\|\lambda f(\lambda\cdot)\|_{\mathcal{M}_{1/2}} = \|f\|_{\mathcal{M}_{1/2}}$) puis à la chaîne d'inclusions suivantes :

Proposition 2.

$$\dot{H}^{1/2} \hookrightarrow L^3 \hookrightarrow L^{3,\infty} \hookrightarrow \mathcal{M}(\dot{H}^1, L^2) \hookrightarrow \dot{M}^{2,3} \hookrightarrow \mathcal{M}_{1/2}.$$

Preuve. Les 3 premières inclusions sont classiques, pour la quatrième on renvoie le lecteur à [5] et nous démontrons seulement la dernière. Dans [6] on trouve le résultat suivant :

$$\dot{M}^{2,3} = \mathcal{M}(\dot{B}_2^{1,1}, L^2)$$

où $\dot{M}^{2,3}$ est l'espace de Morrey–Campanato

$$\|f\|_{\dot{M}^{2,3}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{-1/2} \left(\int_{|x-y| \leqslant R} |f(y)|^2 \,\mathrm{d}y \right)^{1/2} < \infty.$$

Par dualité on a

$$\mathcal{M}(\dot{B}_2^{1,1}, L^2) = \mathcal{M}(L^2, \dot{B}_2^{-1,\infty}),$$

et par interpolation réelle [1],

$$\dot{H}^{1/2} = [\dot{B}_2^{1,1}, L^2]_{1/2,2} \quad \text{et} \quad \dot{H}^{-1/2} = [\dot{B}_2^{-1,\infty}, L^2]_{1/2,2}. \qquad \square$$

Une solution faible des équations de Navier–Stokes sera une solution de (1) au sens des distributions et une solution mild, une solution du problème intégral suivant :

$$u = \mathrm{e}^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u) \,\mathrm{d}s \tag{2}$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray $\mathbb{P} = \mathrm{Id} + \frac{\nabla}{\sqrt{-\Delta}} \otimes \frac{\nabla}{\sqrt{-\Delta}}$ sur les champs à divergence nulle.

On rappelle le résultat suivant dû à Lemarié-Rieusset, Furioli et Terraneo [3] où E_2 désigne l'adhérence des fonctions test dans l'espace de Morrey $L^2_{u\mathrm{loc}}$:

Proposition 3. *Soit $u \in L^2((0, T), E_2)$, u est une solution faible des équations de Navier–Stokes si et seulement si c'est une solution mild.*

Enfin, nous utiliserons le lemme classique suivant (voir [5] p. 140) :

Lemme 4. *Soit f une fonction appartenant à l'espace $L^2((0,T),\dot H^{1/2})$, alors $g(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\sqrt{-\Delta}f\,\mathrm{d}s$ appartient à l'espace $L^\infty((0,T),\dot H^{1/2})$.*

Nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat :

Théorème 5. *Soient u et v deux solutions faibles des équations de Navier–Stokes sur $(0,T^\star)\times\mathbb{R}^3$ ayant la même donnée initiale avec $T^\star\in(0,\infty]$. Si de plus u et v appartiennent à l'espace $\mathcal{C}([0,T^\star),\mathcal{M}_{1/2})\cap L^2((0,T^\star),\dot H^{1/2})$, alors $u=v$ sur $[0,T^\star)$.*

Remarque 1.

- Une solution de Leray $u\in L^\infty((0,T^\star),L^2)\cap L^2((0,T^\star),\dot H^1)$, u appartient clairement a $L^2((0,T^\star),\dot H^{1/2})$.
- Ce résultat est proche du résultat de Chemin [2] et de son amélioration récente par Lemarié-Rieusset [7] où la classe d'unicité est $L^p((0,T^\star),L^q)\cap\mathcal{C}([0,T^\star),B_\infty^{-1,\infty})$ avec $p\in(2,\infty)$ et $q\in(3,\infty)$. Notre résultat n'est pas inclus dans ce dernier et réciproquement puisque $\mathcal{M}_{1/2}\hookrightarrow B_\infty^{-1,\infty}$ et $L^2((0,T^\star),\dot H^{1/2})\cap L^\infty((0,T^\star),B_\infty^{-1,\infty})\hookrightarrow L^3((0,T^\star),L^3)$ (injections de Sobolev précisées).
- Ici la seule hypothèse imposée sur la donnée initiale est d'appartenir à l'espace $\widetilde{M}_{1/2}$ (voir la remarque en début de démonstration).

Preuve. Soit B l'opérateur bilinéaire défini par :

$$B(f,g)=\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot(f\otimes g)\,\mathrm{d}s.$$

Soient deux solutions u et v de (NS) ayant même donnée initiale et appartenant à l'espace $L^2((0,T^\star),\dot H^{1/2})\cap\mathcal{C}([0,T^\star),\mathcal{M}_{1/2})$. On note $w=u-v$ et on a

$$w=-B(u,w)-B(w,v). \tag{3}$$

On commence par faire la remarque suivante inspirée de [7] ; les fonctions tests sont denses dans $\dot H^{1/2}$ donc $u(t)$ et $v(t)$ appartiennent presque partout en t a $\widetilde{\mathcal{M}}_{1/2}$, adhérence des fonctions test dans $\mathcal{M}_{1/2}$. L'espace $\widetilde{\mathcal{M}}_{1/2}$ étant fermé dans $\mathcal{M}_{1/2}$, par continuité (en temps), u et v appartiennent à $\mathcal{C}([0,T^\star),\widetilde{\mathcal{M}}_{1/2})$. Pour $0<T<T^\star$, la continuité en temps permet d'écrire $u=u_1+u_2$ et $v=v_1+v_2$ avec $u_1,v_1\in\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})$ en norme petite et $u_2,v_2\in X_T=L^\infty((0,T),\mathcal{M}(\dot H^{1/2},\dot H^{1/2}))$ (on remarquera que $\mathcal{D}$ est bien inclus dans $\mathcal{M}(\dot H^{1/2},\dot H^{1/2})$ puisque toute fonction bornée ayant son gradient dans L^3 y appartient). Si l'on note $E_T=L^2((0,T),\dot H^{1/2})$, nous avons tout d'abord clairement $u_1\otimes w,\ w\otimes v_1\in L^2((0,T),\dot H^{-1/2})$; puis le théorème de régularité maximale implique :

$$\big\|B(u_1,w)\big\|_{E_T}+\big\|B(w,v_1)\big\|_{E_T}\leqslant C\big(\|u_1\|_{\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})}+\|v_1\|_{\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})}\big)\|w\|_{E_T}. \tag{4}$$

D'autre part, on a $u_2\otimes w,\ w\otimes v_2\in E_T$ et avec le Lemme 4 on obtient

$$\big\|B(u_2,w)\big\|_{E_T}+\big\|B(w,v_2)\big\|_{E_T}\leqslant C\sqrt{T}\big(\|u_2\|_{X_T}+\|v_2\|_{X_T}\big)\|w\|_{E_T}. \tag{5}$$

Finalement avec (3), (4) et (5) on a,

$$\|w\|_{E_T}\leqslant C\big(\|u_1\|_{\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})}+\|v_1\|_{\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})}+\sqrt{T}\|u_2\|_{X_T}+\sqrt{T}\|v_2\|_{X_T}\big)\|w\|_{E_T}.$$

On choisit alors u_1 et v_1 telles que

$$\|u_1\|_{\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})}+\|v_1\|_{\mathcal{C}([0,T],\mathcal{M}_{1/2})}<\frac{1}{4C},$$

puis T suffisament petit tel que

$$\sqrt{T}\|u_2\|_{X_T}+\sqrt{T}\|v_2\|_{X_T}<\frac{1}{4C}.$$

On obtient alors

$$\|w\|_{E_T} \leqslant \frac{1}{2}\|w\|_{E_T}$$

ce qui implique $w = 0$ sur $[0, T)$ et sur $[0, T]$ par continuité. Soit T_0 le temps maximal tel que $w = 0$ sur $[0, T_0)$, si $T_0 < T^\star$ on peut réitérer la preuve précédente à partir de $w(T_0)$ et obtenir une contradiction. On a donc $u = v$ sur $[0, T^\star)$. □

Remarque 2. On peut très légèrement modifier les hypothèses du théorème en remarquant que l'on utilise l'éstimation $L^2((0, T), \dot{H}^{1/2})$ sur $w = u - v$ et pas directement sur u ou v. La classe d'unicité devient alors $u \in \mathcal{C}([0, T), \mathcal{M}_{1/2})$, $u - \mathrm{e}^{t\Delta} u_0 \in L^2((0, T), \dot{H}^{1/2})$ et $u_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{1/2}$.

La remarque précédente nous permet de donner une nouvelle preuve du théorème d'unicité de Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo [3] :

Théorème 6. *Si u et v sont deux solutions faibles des équations de Navier–Stokes sur $(0, T) \times \mathbb{R}^3$, appartenant à $\mathcal{C}([0, T), L^3)$ et ayant la même donnée initiale, alors $u = v$.*

Preuve. On a tout d'abord $\mathcal{C}([0, T), L^3) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, T), \widetilde{\mathcal{M}}_{1/2})$ et, compte tenu de la Remarque 2, il suffit de montrer qu'une solution $u \in \mathcal{C}([0, T), L^3)$ des équations de Navier–Stokes vérifie $u - \mathrm{e}^{-t\Delta} u_0 \in L^2((0, T), \dot{H}^{1/2})$. Pour cela on observe que $u \otimes u$ appartient à $L^\infty((0, T), L^{3/2}) \hookrightarrow L^\infty((0, T), \dot{H}^{-1/2})$ donc $(\sqrt{-\Delta})^{-1}(u \otimes u)$ appartient à $L^2((0, T), \dot{H}^{1/2})$. Puis, le théorème de régularité maximale (voir par Exemple [5] p. 64) donne $u - \mathrm{e}^{-t\Delta} u_0 \in L^2((0, T), \dot{H}^{1/2})$. □

Références

[1] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces, Springer-Verlag, 1976.

[2] J.Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel, J. Anal. Math. 77 (1999) 27–50.

[3] G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites pour Navier–Stokes, Rev. Mat. Iberoamericana 16 (2000) 605–667.

[4] P. Germain, Multipliers, paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier–Stokes equations, J. Differential Equations 226 (2006) 373–428.

[5] P.G. Lemarié-Rieusset, Recent Developments in the Navier–Stokes Problem, Res. Notes Math., vol. 431, Chapman and Hall, 2002.

[6] P.G. Lemarié-Rieusset, The Navier–Stokes equations in the critical Morrey–Campanato space, Rev. Mat. Iberoamericana, in press.

[7] P.G. Lemarié-Rieusset, Uniqueness for the Navier–Stokes problem: remarks on a theorem of Jean-Yves Chemin, preprint, 2006.

[8] P.G. Lemarié-Rieusset, S. Gala, Multiplier between Sobolev spaces and fractional differentiation, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006) 1030–1054.

[9] V.G. Maz'ya, I.E. Verbitsky, The form boundedness criterion for the relativistic Schrödinger operator, Ann. Inst. Fourier 54 (2004) 317–339.