Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 545–548
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Un critère numérique pour la propriété de Koszul généralisée

Benoit Kriegk

LaMUSE, faculté des sciences et techniques, 23, rue P. Michelon, 42023 Saint-Étienne cedex 2, France

Reçu le 28 novembre 2006 ; accepté le 20 février 2007

Disponible sur Internet le 25 avril 2007

Présenté par Alain Connes

Résumé

On donne un critère numérique pour la propriété N-Koszul des algèbres $\mathbb{N}$-graduées connexes. Cela généralise le critère obtenu dans le cas $N = 2$ par Beilinson, Ginzburg et Soergel dans 'Koszul Duality Pattern in Representation Theory'. ***Pour citer cet article : B. Kriegk, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

A numerical criterion for the generalized Koszul property. We give a numerical criterion for the N-Koszul property of connected $\mathbb{N}$-graded algebras. This generalizes the criterion obtained by Beilinson, Ginzburg and Soergel in 'Koszul Duality Pattern in Representation Theory'. ***To cite this article: B. Kriegk, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

Beilinson, Ginzburg et Soergel ont énoncé et démontré dans [1] (Théorème 2.11.1) un critère numérique pour la propriété de Koszul d'une algèbre quadratique. Ce critère est généralisé dans cette note au cas d'algèbres graduées N-homogènes, la propriété de Koszul étant alors celle introduite par Berger dans [2]. Pour une algèbre graduée N-homogène A, la relation numérique en question, qu'on appellera BGS généralisée, consiste en l'égalité de la série de Hilbert de A avec l'inverse d'une variante de la série de Hilbert de l'algèbre de Yoneda $E(A)$ de A (cette variante coïncide avec la série de Hilbert de $E(A)$ dans le cas $N = 2$, voir [8]).

Comme pour $N = 2$, il est facile de montrer que la propriété de Koszul généralisée de A implique la relation BGS généralisée. Le but de cette Note est de montrer la réciproque de cette implication.

Lorsque A est N-homogène et Koszul, BGS généralisée provient d'une relation plus générale, dite relation fondamentale (relation (4)). La relation fondamentale dans le cas N-Koszul était connue et utilisée par Dubois-Violette et Popov dans [5]. D'autre part, Phung Ho Hai et Lorenz ont introduit dans [7], dans le cas $N = 2$, une version de la relation fondamentale dans l'anneau de Grothendieck des comodules sur une certaine bigèbre construite à partir de A, pour donner une démonstration algébrique du cas quantique du 'MacMahon Master Theorem'. Cette version de la re-

Adresse e-mail : benoit.kriegk@univ-st-etienne.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.02.014

lation fondamentale a ensuite été étendue au cas $N \geqslant 2$ par Etingof et Pak pour fournir une extension du 'MacMahon Master Theorem' dans [6].

2. Notations et rappels

Pour ces rappels, on pourra consulter l'article [3] et les références qui s'y trouvent.

Dans toute cette Note, k est corps commutatif et A est une k-algèbre associative unitaire $\mathbb{N}$-graduée. Une telle k-algèbre A sera toujours supposée connexe, c'est-à-dire que si on note $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ la graduation de A, on a $A_0 = k$. De plus, une telle algèbre sera également toujours supposée finiment engendrée en degré 1 (i.e. $\dim_k(A_1) < \infty$ et $A_0 = k$ et A_1 engendrent A comme algèbre). Autrement dit, on considère les algèbres de la forme $A = T(V)/I$ où V est un k-espace vectoriel de dimension finie, et où I est un idéal bilatère gradué inclus dans $\bigoplus_{i \geqslant 2} V^{\otimes i}$. Il est facile de voir que l'on peut construire un sous k-espace vectoriel R de $T(V)$ qui engendre I comme idéal de façon minimale : on pose $R_2 = I_2$, et on choisit R_n pour $n > 2$ de façon à ce que

$$I_n = \left(\sum_{i+j+k=n,\, 2 \leqslant j < n} V^{\otimes i} \otimes R_j \otimes V^{\otimes k} \right) \oplus R_n, \tag{1}$$

Un tel espace R est appelé espace de relations de A. Dans le cas où I est engendré par un espace vectoriel $R \subseteq V^{\otimes N}$ pour un entier $N \geqslant 2$, on dit que A est N-homogène.

Dans toute la suite, sauf indication contraire, les produits tensoriels sont pris sur le corps k. On notera $|E|$ la dimension d'un k-espace vectoriel E de dimension finie.

Les A-modules à gauche $\mathbb{Z}$-gradués forment une catégorie notée A-grMod, dans laquelle les morphismes sont les applications A-linéaires de degré 0. Dans ce qui suit, tous les modules et morphismes sont dans A-grMod. La graduation d'un objet X de A-grMod sera toujours notée $X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X_i$, et les éléments de la composante X_i sont dits homogènes (de degré i). Un module M est dit libre gradué s'il admet une base formée d'éléments homogènes. Enfin, k désignera aussi le A-module à gauche trivial.

Définition 2.1. Soient M et P deux A-modules gradués, et $f : P \to M$ un morphisme de A-grMod. Le couple (P, f) est une couverture projective de M si P est projectif et si f est essentiel, c'est-à-dire que f est surjectif et tel que toute restriction de f à tout sous-module gradué de P, différent de P, n'est pas surjective.

Théorème 2.2. *Soit M un A-module gradué borné inférieurement (c'est-à-dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_i = 0$ pour $i < i_0$). Alors M possède une couverture projective (P, f), unique à isomorphisme près. De plus, P est un A-module libre gradué borné inférieurement, et si M est localement fini (i.e. $|M_i| < \infty$ pour tout i), alors P est localement fini.*

Ce théorème permet de voir que les A-modules gradués projectifs bornés inférieurement sont en fait libre gradués. Ensuite, si M est un A-module gradué borné inférieurement, le théorème précédent montre que M admet une *résolution projective minimale* dans A-grMod, i.e. une résolution projective

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

dans laquelle tous les morphismes $d_i : P_i \to \mathrm{Im}(d_i)$ sont essentiels. Une telle résolution est unique à isomorphisme près. Notons $\mathcal{P}$ une résolution projective minimale du A-module gradué borné inférieurement M, alors on a par définition $\mathrm{Tor}_i^A(k, M) = H_i(k \otimes_A \mathcal{P})$, et on peut montrer que le complexe $k \otimes_A \mathcal{P}$ est à différentielle nulle, ce qui montre que l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}_i^A(k, M)$ est isomorphe à $k \otimes_A P_i$, et que le A-module gradué P_i est isomorphe à $A \otimes \mathrm{Tor}_i^A(k, M)$.

Le Théorème 2.2 montre que la résolution projective minimale de k est formée de A-modules localement finis, donc pour tout i, le k-espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}_i^A(k, k)$ est localement fini. La définition suivante a donc bien un sens :

Définition 2.3. Soit $A = T(V)/(R)$ une k-algèbre graduée connexe comme précédemment. On définit la série de Hilbert de A par

$$H_A(t) = \sum_{i\geqslant 0} |A_i| t^i$$

et la série de Poincaré de A par

$$P_A(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0} \left|\mathrm{Tor}^A_{i,j}(k,k)\right| x^i y^j.$$

Ce qui précède montre que k a une résolution projective minimale s'écrivant :

$$\cdots \longrightarrow A\otimes \mathrm{Tor}^A_n(k,k) \xrightarrow{d_n} A\otimes \mathrm{Tor}^A_{n-1}(k,k) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow A\otimes \mathrm{Tor}^A_1(k,k) \xrightarrow{d_1} A\otimes \mathrm{Tor}^A_0(k,k) \xrightarrow{d_0} k, \tag{2}$$

Il est facile de voir que $A\otimes R \to A\otimes V \to A \to k$ est le début d'une résolution projective minimale de k, où la flèche $A \to k$ est la projection sur $A_0 = k$, la flèche $A\otimes V \to A$ est la multiplication de A, et où la flèche $A\otimes R \to A\otimes V$ est induite par l'injection $R \hookrightarrow A\otimes V$ fournie par (1). Ainsi, (2) devient

$$\cdots \longrightarrow A\otimes \mathrm{Tor}^A_n(k,k) \xrightarrow{d_n} A\otimes \mathrm{Tor}^A_{n-1}(k,k) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow A\otimes R \xrightarrow{d_2} A\otimes V \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{d_0} k. \tag{3}$$

En outre, pour tout i, l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}^A_i(k,k)$ vit en degré supérieur ou égal à i (Proposition 2.1 de [4]). Ainsi, pris en degré $i \geqslant 1$, le complexe (3) donne un complexe exact et fini

$$0 \longrightarrow A_0 \otimes \mathrm{Tor}^A_{i,i}(k,k) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^{i-n} A_j \otimes \mathrm{Tor}^A_{n,i-j}(k,k) \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_i \longrightarrow 0,$$

si bien que sa caractéristique d'Euler–Poincaré est nulle. Cela montre la relation fondamentale

$$H_A(t) P_A(-1,t) = 1. \tag{4}$$

3. Critère numérique de Koszulité

On rappelle la définition de la Koszulité généralisée, introduite dans [2], d'une algèbre N-homogène :

Définition 3.1. Soit $A = T(V)/(R)$ une k-algèbre graduée connexe comme précédemment. Soit un entier $N \geqslant 2$. L'algèbre A est dite N-Koszul si pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel gradué $Tor^A_i(k,k)$ est concentré en degré $\zeta_N(i)$, où $\zeta_N(i) = jN$ si $i = 2j$ et $\zeta_N(i) = jN + 1$ si $i = 2j+1$, où $j \in \mathbb{N}$.

Il revient au même de dire que la résolution projective minimale de k est constituée de A-modules gradués P_i engendrés en degré $\zeta_N(i)$. Une algèbre N-Koszul est en particulier N-homogène.

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

Théorème 3.2. *Soit $A = T(V)/(R)$ une k-algèbre graduée connexe comme précédemment. On suppose que R vit en degré supérieur ou égal à N, pour un certain entier $N \geqslant 2$. On suppose enfin que pour tout i, le k-espace vectoriel gradué* $\mathrm{Tor}^A_i(k,k)$ *est de dimension finie (c'est-à-dire que k a une résolution projective minimale constituée de A-modules libre-gradués de type fini).*

Alors A est N-Koszul si et seulement si on a la relation

$$H_A(t)\left(\sum_{i\geqslant 0} (-1)^i \left|\mathrm{Tor}^A_i(k,k)\right| t^{\zeta_N(i)}\right) = 1, \tag{5}$$

appelée BGS généralisée.

Preuve. Si A est N-Koszul, la relation (5) est claire avec (4) et la Définition 3.1. Supposons maintenant qu'on a l'égalité (5). Comme l'espace de relations R de A vit en degré supérieur ou égal à N, pour tout i l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}^A_i(k,k)$ vit en degré supérieur ou égal à $\zeta_N(i)$ (Proposition 2.1 de [4]).

Avec la relation fondamentale (4), on tire

$$P_A(-1,t)=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\left|\mathrm{Tor}_i^A(k,k)\right|t^{\zeta_N(i)}. \tag{6}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}P_A(-1,t)&=\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\left|\mathrm{Tor}_{i,j}^A(k,k)\right|t^j\\&=\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\in X_j}(-1)^i\left|\mathrm{Tor}_{i,j}^A(k,k)\right|t^j\quad \text{où } X_j=\left\{i;\,0\leqslant\zeta_N(i)\leqslant j\right\}\\&=\sum_{q\geqslant 0}\sum_{r=0}^{N-1}\left[\sum_{i\in X_{Nq+r}}(-1)^i\left|\mathrm{Tor}_{i,Nq+r}^A(k,k)\right|\right]t^{Nq+r}\\&=\sum_{\substack{q\geqslant 0\\ r=0,1}}\left[\sum_{i\in X_{Nq+r}}(-1)^i\left|\mathrm{Tor}_{i,Nq+r}^A(k,k)\right|\right]t^{Nq+r}+\Phi(t)\end{aligned} \tag{7}$$

où $\Phi(t)=0$ si $N=2$ et $\Phi(t)=\sum_{q\geqslant 0}\sum_{2\leqslant r\leqslant N-1}[\sum_{i\in X_{Nq+r}}(-1)^i|\mathrm{Tor}_{i,Nq+r}^A(k,k)|]t^{Nq+r}$ si $N\geqslant 3$. On va maintenant montrer par récurrence sur $i\geqslant 0$ que $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ est concentré en degré $\zeta_N(i)$. Pour cela, on commence par remarquer que $\mathrm{Tor}_0^A(k,k)=k$ est bien concentré en degré 0, et que $\mathrm{Tor}_1^A(k,k)=V$ est également concentré en degré 1 par hypothèse sur A.

Soit $i\geqslant 2$, supposons maintenant que pour tout entier $p\leqslant i-1$, le k-espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}_p^A(k,k)$ est concentré en degré $\zeta_N(p)$. Les égalités (6) et (7) montrent que si $i=2q$, on a $\zeta_N(i)=qN$ et

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Tor}_{2q}^A(k,k)\right|&=\sum_{j\in X_{qN}}(-1)^j\left|\mathrm{Tor}_{j,qN}^A(k,k)\right|\quad \text{où } X_{qN}=\left\{j;\,0\leqslant\zeta_N(j)\leqslant qN\right\}\\&=\left|\mathrm{Tor}_{2q,qN}^A(k,k)\right|+\sum_{\substack{j\neq 2q\\ j\in X_{qN}}}(-1)^j\left|\mathrm{Tor}_{j,qN}^A(k,k)\right|\\&=\left|\mathrm{Tor}_{2q,qN}^A(k,k)\right|,\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence, car $0\leqslant\zeta_N(j)\leqslant\zeta_N(2q)$ et $j\neq 2q$ impliquent $j<2q$ et $\zeta_N(j)\neq 2q$. Cette dernière égalité montre que $\mathrm{Tor}_{2q}^A(k,k)=\mathrm{Tor}_{2q,qN}^A(k,k)$. On obtient de la même manière le résultat pour i impair, ce qui montre que pour tout i, $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ est concentré en degré $\zeta_N(i)$. □

Sous les hypothèses du Théorème 3.2, on peut montrer que l'algèbre de Yoneda $E(A)$ de A est telle que $E(A)_i\simeq\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ comme espaces vectoriels, pour tout $i\geqslant 0$. BGS généralisée (5) peut donc s'écrire sous la forme

$$H_A(t)\left(\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\left|E(A)_i\right|t^{\zeta_N(i)}\right)=1. \tag{8}$$

Références

[1] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, Koszul duality pattern in representation theory, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996) 473–527.
[2] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras, J. Algebra 239 (2001) 705–734.
[3] R. Berger, Dimension de Hochschild des algèbres graduées, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 597–600.
[4] R. Berger, N. Marconnet, Koszul and Gorenstein properties for homogeneous algebras, Algebras and Representation Theory 9 (2006) 67–97.
[5] M. Dubois-Violette, T. Popov, Homogeneous algebras, statistics and combinatorics, Lett. Math. Phys. 61 (2002) 159–170, math.qa/0207085.
[6] P. Etingof, I. Pak, An algebraic extension of the MacMahon master theorem, math.CO/0608005.
[7] Phung Ho Hai, M. Lorenz, Koszul algebras and the quantum MacMahon master theorem, math.QA/0603169, Bull. L.M.S., à paraitre.
[8] A. Polishchuk, L. Positselski, Quadratic Algebras, Univ. Lecture Ser., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.